Ensino Pozitivista.

Logica.

Geometria Preliminar.

Coordenação especial.

12.ª Lição.

(Trigonometria).

Teoria fundamental das formulas trigonometricas.

I

Concepção filozofica da trigonometria; sua instituição fundamental por Hiparco; primeiro aperfeiçoamento capital, devido aos arabes.

1. Concepção filozofica da trigonometria.

"As nossas ultimas lições extenderão suficientemente a geometria especial de maneira a ligá-la á geometria geral, manifestando a necessidade de generalizar os metodos á medida que o dominio se engrandece. Essa ligação torna-se direta no estudo complementar pelo qual o nosso Mestre instituiu a solução algebrica do problema fundamental sobre a medida dos cumprimentos retilineos, cuja solução grafica foi estabelecida pelo preambulo geometrico."

(Sinteze Subjetiva).

Para comprehender bem o objeto e a necessidade desse estudo importa a-

preciar convenientemente o problema trigonometrico. Porque similhante estudo rezulta da solução que a Humanidade deu a tal problema, primeiro, espontaneamente e, depois, sistematicamente. Com efeito, este problema póde ser rezolvido de dois modos: ou por um processo que só convem a ele, e como tal especial, conforme o espirito da geometria antiga; ou mediante a aplicação dos metodos gerais peculiares á geometria moderna. Dessas duas marchas, foi a primeira que prevaleceu; e é por isso que o estudo da trigonometria constitue o complemento da geometria preliminar. Mas cumpre indicar os motivos que determinárão a Humanidade, não só a instituir assim a primeira solução, mas tambem a mante-la posteriormente.

Para isso, comecemos por examinar as duas soluções de que se trata afim de instituir o seu confronto. O problema trigonometrico consiste na determinação algebrica das medidas a que dão lugar as fórmas constituidas exclusivamente pelo concurso de linhas retas ou de linhas retas com planos. Similhante modo de determinação é tanto mais indispensavel quanto maior é a precizão que se requer nas medidas. Tal é o objetivo verdadeiro das teorias trigonometricas, que, embora permitão avaliar as figuras esfericas terminadas por circulos, não têm diretamente similhante destino. Para bem sentir o fundamento desta observação, basta recordar que a trigonometria foi instituida pelas necessidades astronomicas e que o surto desses estudos ligou-se em breve ao dezenvolvimento da navegação. Mas a conexão que vimos existir entre os problemas retilineos e circulares patentêão que a solução havia de fato de convir aos dois cazos, embora só se tivesse em vista o mais elementar. A denominação trigonometria tem a imensa vantagem de rezumir o conjunto da apreciação geometrica a que dá lugar o exame aprofundado de tais problemas mostrando que tudo reduz-se á medida do triangulo retilineo.

Isto posto, é facil de perceber que tal problema constitue um cazo particular da questão geral que consiste em medir as fórmas quaisquer; e, portanto, ele deve ser accessivel aos metodos gerais instituidos para similhantes medidas. É verdade que, á pri-

meira vista, póde parecer que a trigonometria faz parte dos preliminares que mostramos serem indispensaveis á instituição dos referidos metodos. Mas o exame direto destes dissipa logo similhante hezitação. Porque a geometria geral conforme rezultou da fundação cartezjana e da construção leibnitziana não exige sinão que as fórmas sejão reprezentadas por equações entre linhas retas e que estejão instituidas as teorias das figuras retilineas, como já fizemos. Feito isto, tudo o mais decorre dessas equações mediante transformações puramente algebricas; quer se trate do estudo das propriedades das figuras, quer se tenha em vista a medida da extensão. É o que póde desde já ser assinalado, a propozito do problema trigonometrico.

Assim, suponhamos que se trata de rezolver algebricamente todos os problemas a que dá lugar um triangulo do qual se conhecem tres elementos, incluindo nestes pelo menos um lado. É claro que tudo reduz-se a estabelecer tres equações distintas entre os seus lados e os seus angulos; isto é, entre os seus lados e os arcos correspondentes aos angulos. Chamemos a, b, c os tres lados, A, B, C os tres angulos, escolhendo as letras de modo que o mesmo simbolo alfabetico corresponda ao lado e ao angulo que lhe é oposto.

Isto posto, imaginando um circulo circumscrito ao triangulo, os lados deste tornão-se cordas de arcos, cada um dos quais é o dobro do angulo oposto. Ora, veremos, em geometria geral, que a equação de tal circulo é facilmente instituida por meio de seis parametros retilinios, dois para cada vertice. Esta equação póde mesmo simplificar-se de modo que tres desses parametros se anulem. A equação do circulo conterá então só tres constantes das quais uma será um dos lados do triangulo. Os outros dois lados podem tambem ser expressos pelos mesmos parametros, mediante o teorema teocratico dos tres quadrados. Emfim a geometria integral fornece tres equações entre os comprimentos dos tres arcos, e, portanto, entre os angulos e os referidos parametros. Mas só duas destas ultimas equações são distintas; porque qualquer

delas rezulta das outras duas, em virtude do primeiro teorema de Thales.

Têm-se, pois, ao todo, oito variaveis, a saber: os 3 parametros dos quais um é um lado; os 2 lados; e os tres angulos; e cinco equações das quais uma é só entre os tres angulos (1.º teorema de Thales). Abstrahindo desta, e exprimindo os dois parametros auxiliares em formação dos lados, fica-se afinal com 2 equações entre dois angulos e os tres lados. Essas duas equações permitem determinar duas variaveis quaisquer quando forem dadas tres; e é claro que uma destas será sempre um lado. Dispõe-se assim de tudo quanto é precizo para calcular o triangulo.

O problema trigonometrico podia, pois, ser rezolvido mediante aplicação dos metodos gerais instituidos pela geometria moderna. Mas esses metodos não sendo accessiveis aos antigos por motivos de toda ordem, dos quais os capitais são os de ordem moral, como já assinalamos, não foi assim que a questão foi rezolvida originariamente. É esta solução que nos cumpre caraterizar agora. Para isto recordaremos a apreciação de nosso Mestre, que as observações precedentes só tiverão por fim comentar:

« Tendo suficientemente encarado a solução grafica do problema fundamental relativo á linha reta, isto é, da determinação uns pelos outros dos diversos elementos de uma figura retilinia qualquer, devemos agora examinar de uma maneira geral a sua solução algebrica.

Esta segunda solução, cuja evidente superioridade é inutil apreciar expressamente aqui, pertence necessariamente, pela natureza mesmo da questão, ao sistema da geometria antiga, conquanto o processo logico empregado a faça ordinariamente separar dele mal a proposito. Teremos assim ensejo de verificar, sob um aspeto muito importante, o que foi estabelecido em geral na lição precedente,

a saber, que não é pelo emprego do calculo que se deve distinguir essencialmente a geometria moderna da dos antigos. Os antigos são, com efeito, os verdadeiros inventores da trigonometria atual, tanto esferica como retilinia, que sómente era muito menos perfeita entre as suas mãos, á vista da extrema inferioridade dos seus conhecimentos algebricos. E' pois realmente nesta lição, e não, como se poderia crer a principio, nas que consagraremos depois ao exame filozofico da geometria _geral_, que convem apreciar o carater desta importante teoria preliminar, habitualmente comprehendida, sem razão, no que se chama a _geometria analitica_, e que não é efetivamente sinão um complemento da _geometria elementar_ propriamente dita.

"Todas as figuras retilinias podendo ser decompostas em triangulos, basta evidentemente saber determinar uns pelos outros os diversos elementos de um triangulo, o que reduz a _poligonometria_ á simples _trigonometria_.

Para que tal questão possa ser rezolvida algebricamente, a dificuldade consiste essencialmente em formar entre os angulos e os lados de um triangulo tres equações distintas, que, uma vez obtidas, reduzirão evidentemente todos os problemas trigonometricos a puras pesquizas de calculo. Considerando da maneira mais geral o estabelecimento dessas equações vê-se nacer imediatamente uma distinção fundamental relativamente ao modo de introdução dos angulos no calculo, conforme se os fizer entrarem diretamente por si mesmos ou pelos arcos circulares, que lhes são proporcionais, ou forem eles substituidos por certas retas, como, por exemplo, as cordas desses arcos que lhes são inherentes, e que, por essa razão, denominão-se ordinariamente as suas linhas trigonometricas. Desses dois sistemas de trigonometria, o segundo deveu ser, na origem, o unico adotado, como sendo o unico praticavel, pois que o estado da geometria permitia então achar assaz facilmente relações exatas entre os lados dos triangulos e as linhas trigonometricas dos angulos, ao passo que teria sido

absolutamente impossivel, nessa epoca, estabelecer equações entre os lados e os proprios angulos. A solução podendo hoje ser obtida indiferentemente em um e outro sistema, esse motivo de preferencia não subziste mais. Porem os geometras não deixarão por isso de perzistir em seguir por escolha o sistema primitivamente admitido por necessidade; porque a mesma razão que permitiu obter assim as equações trigonometricas com muito mais facilidade, deve igualmente, como é ainda mais facil de conceber a priori, tornar essas equações muito mais simples, pois que elas existem então sómente entre linhas retas, em lugar de serem estabelecidas entre linhas retas e arcos de circulos. Tal consideração tem tanto mais importancia quanto trata-se de formulas eminentemente elementares, destinadas a ser continuamente empregadas em todas as partes da siencia matematica bem como em todas as suas diversas aplicações.

« Pode-se objetar, é verdade, que, quando um angulo é dado, é sempre com efeito por si mesmo e não pela sua linha trigonometrica; e que, quando ele é incognito, é o seu valor angular que se trata propriamente de determinar, e não o de alguma das suas linhas trigonometricas. Parece, á vista disto, que tais linhas não são entre os lados e os angulos sinão um intermediario inutil, que deve ser finalmente eliminado, e cuja introdução não parece sucetivel de simplificar a pesquiza proposta. Importa, com efeito explicar com mais generalidade e precizão do que se faz de ordinario a imensa utilidade real dessa maneira de proceder. Ela consiste em que a introdução dessas grandezas auxiliares partilha a questão total da trigonometria em duas outras essencialmente distintas das quais uma tem por objeto passar dos angulos para as suas linhas trigonometricas ou reciprocamente, e a outra se propõe a determinar os lados dos triangulos pelas linhas trigonometricas dos seus

angulos ou reciprocamente. Ora, a primeira dessas duas questões fundamentais é evidentemente sucetivel, pela sua natureza, de ser inteiramente tratada e reduzida a taboas numericas uma vez por todas, considerando todos os angulos possiveis, pois que ela não depende sinão desses angulos, e nenhumamente dos triangulos particulares nos quais eles podem entrar em cada cazo; ao passo que a solução da segunda questão deve necessariamente ser renovada, pelo menos sob o aspeto arimetico, em cada novo triangulo que se tiver de rezolver. É por isso que a primeira porção do trabalho total, que seria precizamente a mais penoza, não é mais contada ordinariamente, estando sempre feita de antemão; ao passo que si tal decompozição não tivesse sido instituida, cada um se teria achado evidentemente na obrigação de recomeçar em cada cazo particular o calculo por inteiro. Tal é a propriedade essencial do sistema trigonometrico adotado, que, com efeito, não aprezentaria realmente nenhuma vantagem efetiva si, para cada angulo a considerar, fosse precizo calcular continuamente a sua linha trigonometrica ou reciprocamente: o intermediario seria então mais embaraçozo do que comodo.

« A fim de comprehender nitidamente a verdadeira natureza dessa concepção, seria util compará-la com uma concepção ainda mais importante, destinada a produzir um efeito analogo, quer sob o aspeto algebrico, quer sobretudo sob o aspeto arimetico, a admiravel teoria dos logaritmos. Examinando de uma maneira filozofica a influencia dessa teoria, vê-se, com efeito, que o seu rezultado geral é ter decomposto todas as operações arimeticas imaginaveis em duas partes distintas das quais a primeira, que é a mais complicada, é sucetivel de ser executada de antemão de uma vez por todas, como não dependendo sinão dos numeros a considerar e de modo algum das diversas combinações quaisquer nas quais eles podem entrar, e que consiste em reprezentar-se todos os numeros como potencias assinalaveis de um numero constante; a segunda parte do calculo que deve necessariamente ser recomeçada para cada formula nova a avaliar, ficando desde então reduzida a executar sobre es

ses expoentes operações correlativas infinitamente mais simples. Limito-me a indicar esse confronto, que cada um póde ezadamente dezenvolver.»

Para apanhar todo o alcance desse confronto de nosso Mestre, convem lembrar que os logaritmos forão instituidos em virtude do mesmo impulso que fez instituir e dezenvolver as linhas trigonometricas. Com efeito, o seu primitivo destino foi a simplificação dos calculos trigonometricos.

«Devemos demais observar como uma propriedade, secundaria hoje, mas capital na origem, do sistema trigonometrico adotado, a circumstancia muito notavel que a determinação dos angulos pelas suas linhas trigonometricas ou reciprocamente, é sucetivel de uma solução arimetica, a unica que é diretamente indispensavel para a destinação propria da trigonometria, sem ter preliminarmente rezolvido a questão algebrica correspondente. Foi sem duvida a tal particularidade que os antigos deverão o ter podido conhecer a trigonometria. A pesquiza assim concebida foi tanto mais facil quanto os antigos tendo tomado naturalmente a corda para linha trigonometrica, aconteceu que as taboas achavão-se de antemão construidas em parte por outro motivo, em virtude do trabalho de Archimedes sobre a retificação do circulo, donde rezultava a determinação efetiva de uma certa serie de cordas, de sorte que, quando mais tarde Hiparco inventou a trigonometria, ele poude limitar-se a completar essa operação por intercalações convenientes, o que marca nitidamente a filiação das ideias a esse respeito.

«Afim de esboçar inteiramente este apanhado filozofico da trigonometria, convem observar agora que a extensão do mesmo motivo que conduz a substituir os angulos ou os arcos de circulo por linhas retas com o intuito de simplificar as equações, deve tambem levar a empregar concorrentemente varias linhas trigonometricas

em lugar de se limitar a uma só, como o fazião os antigos para aperfeiçoar esse sistema escolhendo aquela que fôr algebricamente mais conveniente em tal ou tal ocazião. Sob esse aspeto, é claro que o numero dessas linhas não é por si mesmo de modo algum limitado; contanto que elas sejão determinadas em virtude do arco, e que reciprocamente elas o determinem, seja qual fôr aliás a lei segundo a qual elas derivem dele, elas são aptas a lhe serem substituidas nas equações. Limitando-se ás construções mais simples, os Arabes e os modernos depois levárão sucessivamente a quatro ou cinco o numero das linhas trigonometricas diretas, que poderia ser extendido muito mais. Porem em lugar de recorrer a formações geometricas que acabarião por tornar-se muito complicadas, concebe-se com uma extrema facilidade tantas novas linhas trigonometricas quantas o podem exigir as transformações algebricas, por meio de um artificio notavel, que não é ordinariamente apanhado de uma maneira assaz geral. Consiste ele, sem multiplicar imediatamente as linhas trigonometricas peculiares a cada arco considerado, em introduzir novas considerando esse arco como determinado indiretamente por todas as linhas relativas a um arco que seja uma formação muito simples do primeiro. É assim, por exemplo, que muitas vezes, para calcular um angulo com mais facilidade, determinar-se-á, em lugar do seu seno, o seno da sua metade ou do seu dobro, etc. Tal creação de linhas trigonometricas indiretas é evidentemente muito mais fecunda do que todos processos geometricos imediatos para obter novas. Pode-se dizer, á vista disto, que o numero das linhas trigonometricas efetivamente empregadas hoje pelos geometras é realmente indefinido, pois que, a cada instante por assim dizer, as transformações algebricas podem conduzir a aumentá-lo pelo processo que acabo de indicar. Somente, não se deu até aqui nomes especiais sinão áquelas dessas linhas indiretas que se referem ao complemento do arco primitivo, as outras não aparecendo assaz frequentemente para necessitar os

similhantes denominações o que fez comumente desconhecer a verdadeira extensão do sistema trigonometrico.

« Essa multiplicidade das linhas trigonometricas faz nacer evidentemente, na trigonometria, uma terceira questão fundamental, o estudo das relações que existem entre essas diversas linhas; pois que, sem tal conhecimento, não se poderia utilizar, para as necessidades do calculo essa variedade de grandezas auxiliares, que não têm entretanto outra destinação. É claro, alem disso, em virtude da consideração indicada ha pouco, que essa parte essencial da trigonometria, conquanto simplesmente preparatoria, é pela sua natureza, sucetivel de uma extensão indefinida quando se a encara na sua inteira generalidade, ao passo que as outras duas são necessariamente circumscritas em um quadro rigorozamente definido.

« Não precizo ajuntar expressamente que essas tres partes principais da trigonometrica devem ser estudadas em uma ordem precizamente inversa daquela segundo a qual nós as vimos derivar necessariamente da natureza geral do assunto, porque a terceira é vizivelmente independente das outras duas, e a segunda da que se apresentou em primeiro lugar a rezolução dos triangulos propriamente dita, que deve, por essa razão, ser tratada por ultimo, o que tornava tanto mais importante a consideração da filiação natural.

« É inutil encarar aqui distintamente a trigonometria esferica, que não póde dar lugar a nenhuma consideração filozofica especial, pois que, por mais essencial que ela seja pela importancia e a multiplicidade dos seus uzos, não se póde mais tratá-la hoje, no seu conjunto, sinão como uma simples aplicação da trigonometria retilinia, que fornece imediatamente as suas equações fundamentais, substituindo ao triangulo esferico o angulo triedro correspondente.»

(Syst. Ph. Pos. I, 416-426).

Para acabar essa apreciação filozofica do conjunto da trigonometria convem mencionar que ficou assim instituida a solidariedade de todos os progressos matematicos com os progressos astronomicos, e portanto com toda a evolução teorica. Porque desde então o dezenvolvimento da algebra sob a sua melhor forma estava intimamente ligado á completa solução do problema trigonometrico, não só no ponto de vista abstrato, mas tambem no ponto de vista concreto, isto é, tanto quanto o exigisse o seu destino astronomico. A trigonometria forneceu assim durante seculos um tipo particular mas decizivo da união entre o calculo e a geometria, que Descartes devia generalizar e que só Leibnitz completado por Lagrange permitiria sistematizar. Mas vê-se tambem por ahi que todo o surto matematico ficava dependendo da cultura astronomica. Ora o dezenvolvimento desta estava ligado ao acendente do dogma do duplo movimento da Terra. Esse dogma não podia prevalecer enquanto a elevação moral da Humanidade não permitisse que o seu altruismo se desprendesse das concepções teologicas. Reconhece-se por esta fórma que toda a evolução matematica dependia finalmente do surto afetivo. Esta concluzão não constitui porem sinão uma confirmação da apreciação pela qual o nosso Mestre demonstrou que em virtude da nossa constituição cerebral, a evolução teorica e pratica da Humanidade devia rezultar da sua gradual elevação moral. A inteligencia e a atividade são indispensaveis para subir da vegetalidade á animalidade; mas só o amôr permite que a animalidade acenda da existencia individual á vida coletiva, sem a qual não se póde sequer imaginar nem a poezia, nem a siencia, nem a industria.

2. Concepção geral da trigonometria grega. Archimedes e Hiparco. Filiação historica e portanto logica dos pensamentos matematicos a este respeito.

Para conceber convenientemente a trigonometria moderna, comecemos por apre-

zentar a trigonometria como ela foi originariamente instituida por Hiparco. Nos serviremos para isso dos trabalhos de Delambre sobre a Historia da Astronomia Antiga.

A trigonometria foi instituida por Hiparco, antes da sua descoberta da precessão dos equinocios, conforme o demonstrou Delambre a quem o nosso Mestre qualifica de seu ilustre mestre de Astronomia o judiciozo Delambre. O mesmo sientista provou igualmente que Hiparco foi o maior astronomo da antiguidade e um dos homens mais espantozos da siencia grega (Hist. Astr. Ant. I, pg. 136).

Arato escrevera um poema idealizando as concepções astronomicas de Eudoxio.[1] « Hiparco nos conta que esse poema tinha sido o objeto de muitas pesquizas, mas os autores, pela maior parte não erão nem matematicos nem astronomos: Hiparco que era uma e outra coiza, vendo que as suas observações não concordavão nem com os versos do poeta, nem com as notas dos comentadores, acreditou que seria util assinalar os erros de um e dos outros. » (H. A.) Tal foi o motivo do comentario de Hiparco; e foi ahi que Delambre achou os elementos para o seu juizo. Com efeito, o estudo dessa obra mostra que o grande astronomo já estava então de posse da trigonometria e que ele tinha exposto os seus metodos no Tratado dos levantes simultaneos dos astros. Ora, nessa epoca ele não conhecia ainda a precessão. Foi pois para rezolver as questões a que dá lugar o problema dos levantes simultaneos que Hiparco viu-se conduzido a instituir a trigonometria. Isto já nos faz ver que foi a propozito da trigonometria esferica que surgiu o problema de substituir as construções graficas pelos metodos algebricos. Convem notar que « as observações dos nacimentos e ocazos das estrelas constituirão por muito tempo toda a Astronomia dos antigos, e a materia dos seus calendarios: esses nacimentos e ocazos regularão a ordem

---

[1] Eudoxio e Arato estão no calendario — Mez de Archimedes, lunedia da semana de Hiparco.

dos trabalhos agricolas e os tempos proprios para a navegação.» (H. A. A. I, 23)

Isto posto, notemos que o problema dos levantes simultaneos oferece dois cazos distintos, conforme se trata dos astros fixos, isto é, das estrelas propriamente ditas, ou dos astros errantes, isto é, o Sol, a Lua e os planetas. Para perceber a razão dessa distinção, convem recordar algumas noções de astronomia fetichica e fetichocratica e, como tais, suceptiveis de serem adquiridas durante a 2ª infancia.

Chama-se horizonte[1] (de uma palavra grega que significa termo, limite) o circulo rezultante da interseção do Céu com o plano no qual o observador parece estar na superficie da Terra. Todos os fenomenos celestes se passão como si o observador ocupasse o centro do horizonte; e a vertical correspondente a esse ponto encontra o Céu em outro que se denomina o zenith, isto é, ponto por ecelencia. Os astros todos parecem nacer sempre do mesmo lado do horizonte e deitarem-se do lado oposto. De sorte que é facil descobrir que existe um diametro do horizonte separando os orientes ou levantes dos ocidentes ou poentes dos astros. Este diametro, chama-se a meridiana; e o diametro perpendicular á meridiana, denomina-se linha leste-oeste ou nacente-poente.

Uma observação conveniente faz descobrir que o trajeto de todos os astros, do oriente para o ocidente, efetua-se como si os astros descrevessem circulos cujos planos fossem paralelos entre si, e cujos centros se achassem em uma mesma reta passando pelo centro do horizonte. De sorte que o conjunto dos fenomenos se dá no movimento diurno, como si o Céu fosse a metade vizivel de uma esfera na qual os astros estivessem engastados, e que girasse em torno de uma reta, mais ou menos inclinada sobre o horizonte. A essa reta chama-se o eixo do mundo; e os pontos em que ela atravessa a esfera celeste denominão-se os pólos do mundo: um fica acima e

---

[1] É em um livro de Euclides que se encontra o mais antigo uzo desse termo (Delambre, H. A. A.)

o outro abaixo do horizonte. Ao que está acima do horizonte dos povos que habitão a principal região da Terra, chama-se Norte e ao outro Sul. No Rio de Janeiro o polo que se acha acima do horizonte é o do Sul; mas ha lugares do Brazil para os quaes o polo do Norte está acima do horizonte. O plano determinado pelo eixo do mundo e a meridiana é perpendicular ao horizonte e constitúi o que se chama especialmente o meridiano do lugar. As extremidades da meridiana têm os nomes de Norte e Sul, conforme o hemisferio a que pertencem. O Norte, Sul, Leste e Oeste, são os pontos cardiaes do horizonte.

O circulo da esfera celeste que corta o horizonte segundo a linha leste-oeste e é perpendicular ao eixo do mundo denomina-se Equador. Vê-se que a sua distancia ao zenith, contada segundo o meridiano do lugar, é igual á elevação do polo sobre o horizonte. Ora, a Terra sendo sensivelmente esferica, o horizonte reprezenta o plano tangente no ponto em que se acha o observador. Mas o conjunto dos fenomenos celestes se passa como si esse plano estivesse transportado paralelamente a si mesmo para o centro da Terra. A distancia do zenith ao equador do mundo mede pois o angulo da vertical com o equador terrestre ou a latitude do lugar. Assim a latitude é dada pela elevação do polo sobre o horizonte.

Continuando a observação dos astros, nota-se que ha entre eles a seguinte diferença: a quazi totalidade deles descreve sempre os mesmos circulos ou paralelos e conservão os mesmos orientes e poentes simultaneos. Porem o Sol, a Lua, e alguns dos que, á primeira inspeção, parecem estrelas, nacem successivamente em pontos diversos do horizonte e com estrelas diferentes. São os astros errantes, ou planetas. Hoje a palavra planeta é empregada para dezignar apenas Mercurio, Venus, Marte, Jupiter e Saturno, alem dos outros que os antigos não conhecerão. Ora, não é igualmente facil dar-se conta das principais circumstancias dos mo-

vimentos desses astros errantes. Assim a explicação que basta para conceber os movimentos do Sol e da Lua é insuficiente para os outros. Limitando-se a esses dois astros mais importantes, a Humanidade reconheceu desde o periodo fetichocratico que os seus movimentos podião ser reprezentados imaginando que eles descrevião, em tempos mais ou menos longos, e em sentido contrario ao movimento diurno do Céu, circulos da esfera celeste inclinados em relação ao equador. De sorte que a pozição do Sol, por exemplo, depende a cada instante do movimento diurno da esfera celeste e do seu movimento proprio, em sentido oposto, num circulo dessa esfera e que se denomina hoje a eclitica, ou circulo dos eclipses. Os gregos o chamavão o obliquo.

Comprehende-se quanto era importante fixar a pozição de tal circulo caraterizando os astros que se achão sobre ele ou nas suas proximidades. Essa importancia era tanto mais facil de sentir-se quanto todos os astros errantes limitão os seus movimentos proprios a uma pequena facha ao norte e ao sul da eclitica. Ora, desde o periodo fetichocratico que as estrelas forão reunidas em grupos aos quais deu-se posteriormente o nome de constelações ou asterismos. Essas constelações forão constituidas irregularmente; e, sob o acendente do politeismo, os teocratas imaginárão que tais constelações correspondião a entes diversos, com formas animais ou humanas, rezidentes no Céu. A esfera sideral ficou assim repartida entre tipos fantasticos que tinhão a vantagem de introduzir a logica dos sentimentos e das imagens na consideração das constelações. Os modernos, empiricamente dominados por tais antecedentes, intercalárão novos objetos chimericos entre as antigas constelações desde então mais ou menos arbitrariamente alteradas.

A primeira divizão do ano tendo conduzido os teocratas a estabelecerem o mez de 30 dias, ocazionou a divizão da eclitica em doze signos ou cazas do Sol, aos quais correspondião outras tantas constelações, tambem sucessivamente ocu-

padas pelos outros astros errantes. Dahi a importancia naturalmente dada a essa facha do Céu, a que os gregos chamárão zodiaco (caminho dos animais) e ás constelações que ela atravessa. Essas constelações achão-se na ordem em que o Sol e os planetas as atravessão, isto é, de ocidente para oriente, reunidas nesses dois versos latinos:

Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo
Libraque, Scorpio, Sagitarius, Capricornus, Aquarius, Pices.

As estações estando ligadas ao curso do Sol, o aparecimento dessas constelações zodiacais sobre o horizonte tornou-se o meio de marcar as diversas epocas do ano. E dahi rezultou o habito de referir a essas constelações todas as outras, o que fez surgir o problema dos orientes e ocazos simultaneos. No principio as relações assim instituidas erão mais ou menos vagas; mas, á medida que o espirito pozitivo se dezenvolveu, o dezejo e a necessidade de precizão se tornárão cada vez mais pronunciados. Foi essa aspiração crecente por um critério za concepção da realidade que conduziu Hiparco a instituir a Trigonometria, a fim de rezolver com ecatidão o problema dos orientes e poentes simultaneos, a que os seus predecessores havião dado apenas soluções mais ou menos vagas.

Para conseguir similhante ecatidão, era necessario começar por caraterizar geometricamente todas as circunstancias do movimento de cada astro. Ora, tratando-se de uma estrela, o atingimento de similhante objetivo parece exigir unicamente que se determine o paralelo e o meridiano em cuja interseção ela se acha, e conhecer, por outro lado, a latitude do lugar. Similhante modo de instituir o estudo dos fenomenos astronomicos foi devido aos predecessores de Hiparco, que já encontrou os habitos, ainda hoje em vigor, quanto a esta maneira de caraterizar a pozição dos astros. Posteriormente, Hiparco o substituiu por outro mais bem adaptado ás estrelas. O paralelo é determinado mediante a sua distancia ao equador, contada segundo

um meridiano qualquer. Essa distancia é o que se chama declinação do astro; e é apreciada para o norte e para o sul até 90°, dahi o nome de circulos de declinação dados aos meridianos celestes. Quanto ao meridiano do astro, fica assinalado conhecendo-se o angulo que ele faz com um meridiano convencionado, e que é medido pelo arco do equador comprehendido entre ambos. Tomou-se, para esse meridiano-origem, o que passa pela interseção da ecliptica com o equador e onde o Sol se acha quando começa a primavera para o hemisferio norte. É o que se chama o ponto vernal ou de Aries, esta ultima apelação sendo tirada da constelação em que ele se achava na epoca em que começou o surto decisivo da astronomia grega. O arco do equador comprehendido entre esse ponto e o circulo de declinação do astro e apreciado no sentido do movimento anual do Sol até 360° é o que se chama a acenção-reta do astro. Essa denominação foi tirada do aspeto que toma o movimento diurno dos astros quando o eixo do mundo coincide com a meridiana. Então os astros descrevem circulos cujos planos são perpendiculares ao horizonte e diz-se que a esfera é reta; donde a denominação de acenção ou subida na esfera reta, que os gregos dérão ao arco do paralelo que mede o angulo do circulo de declinação com o meridiano-origem, ou o arco equivalente do equador. Os modernos abreviárão a expressão em acenção reta. Vê-se tambem que, nessas condições todos os astros que têm a mesma acensão reta, nacem e deitão-se simultaneamente.

Quando, porem, o eixo do mundo é inclinado sobre o horizonte, tem-se a esfera obliqua; e então chama-se acensão obliqua, isto é, acensão na esfera obliqua, o arco do equador comprehendido entre o ponto vernal e o horizonte quando o astro está no horizonte. Conta-se no mesmo sentido que a acensão reta e até 360°. Vê-se que todos os astros que estão no horizonte oriental têm a mesma acensão obliqua; e o mesmo diz-se dos que se achão no horizonte ocidental. Mas os que nacem simultaneamente não se deitão juntamente. Considerando-se todos os astros que estão no ho-

rizonte em um momento qualquer, vê-se que os que estão a oriente têm a mesma acensão obliqua e que a diferença entre esta e a acensão obliqua dos astros que estão ao mesmo tempo no horizonte ocidental é de 180°. A diferença entre a acensão reta e a acensão obliqua é o que se chama a diferença acensional. De sorte que, para saber si dois astros nacem ou deitão-se ao mesmo tempo, basta subtraher das suas acensões retas as diferenças acensionais respetivas; os restos devem ser iguais ou diferirem de 180°, si os dois se acharem no horizonte ao mesmo tempo.

Mas a acensão reta do Sol, da Lua e dos Planetas variando a cada momento, fez surgir o problema de determinar o ponto do seu circulo proprio que estava no horizonte quando fosse conhecida a acensão obliqua de qualquer estrela, para saber quais as estrelas que nacião e se deitavão com elis. No caso do Sol que é o mais importante, tratava-se pois de determinar o ponto da ecliptica que estava simultaneamente no horizonte com uma estrela cuja declinação e acensão reta fossem conhecidas.

Convem notar finalmente que os elementos mais espontaneos fornecidos pela observação, para determinar a pozição de um astro, não consistem na acensão reta e na declinação; mas sim na sua altura e no seu azimuth ou na sua amplitude. A altura é o arco do circulo vertical que passa pelo astro, comprehendido entre o astro e o horizonte; o azimuth é o angulo que este vertical forma com o meridiano do lugar e que se mede no horizonte a partir do norte ou do sul até 180°. Quanto á amplitude é o complemento do azimuth ou a distancia do vertical do astro á linha leste-oeste; é ortiva ou ocaza conforme assinala o levante ou poente do astro.

Dadas estas explicações preliminares, transcreveremos o trecho do Comentario que Hiparco fez do poema de Arato e donde Delambre inferiu que o grande Astronomo foi o fundador da Trigonometria. Citamos o extrato feito por De-

tambem:

"Eles (Eudoxio e Arato) dizem ambos que Artophilax (ou Boieiro) se deita em opozição com quatro signos, Aries, Touro, Gemeos e Cancer. Na verdade é com dois signos e meio sómente. Ele começa a deitar-se com o nacer do 6.° do Touro, e acaba de deitar-se com o nacer do 19.° dos Gemeos.

"Reprezentemo-nos no horizonte ocidental o pé esquerdo do Boieiro, a sua declinação é de 27°20' e a sua acenção reta de 6^{s}1°.

"Eu acho 6^{s}3°38', a declinação 29°28', ou 6^{s}2° e 29°50'. Nenhum desses calculos concorda com Hiparco. Ele faz a declinação demaziado fraca de 2°½ ou ⅚, e a acenção reta demaziado fraca de 2°½ ou 1°⅓. Adotemos os numeros de Hiparco, acharemos para a duração do dia, ou para o arco diurno da estrela:

$$15^h 0'38 \text{ em lugar de } 15^h - \frac{1}{20} = 14^h 57'.$$

"Para o ponto do equador no meridiano,

9^{s}23°35'. Hiparco dá 9°21°55'.

"Para o ponto culminante,

9°21°45', Hiparco dá 9°22°.

"Suspeito algum erro de copia, porque ele dá como eu o ponto culminante. Assim em lugar de 9°21°55', eu leria 9°23°55'. Eu acho continuando o calculo, para o ponto oriente, 1^{s}6°52'. Hiparco diz 1^{s}6°, e ele acrecenta: Todos esses metodos são demonstrados geometricamente no meu tratado sobre essas materias. Ele já citou esse tratado dos orientes e poentes, ele nos assegura aqui que demonstrou a solução dos triangulos esfericos que servem para achar o ponto oriente da ecliptica. Esta passagem nos autoriza a considerá-lo como o inventor dessa sciencia, sem a qual não ha Astronomia. Hiparco nos mostra aqui a verdadeira maneira de calcular esses fenomenos; é de colocar no horizonte uma estrela cuja declinação e acenção reta são conhecidas; dahi deduz-se o ponto da ecliptica que está no horizonte, a declinação e a acenção reta desse ponto, tem-se a sua acenção obliqua que é a de todos os

astros que estão no horizonte no mesmo instante. Póde-se pois vêr si um astro conhecido está deitado ou levantado; porque tendo a acensão reta e a acensão obliqua, tem-se a diferença acencional $\underline{dAR}$ cuja expressão é

$$\operatorname{sen} dAR = \operatorname{tang} D \operatorname{tang} H$$

"Fazei

$$\operatorname{sen} dAR \cot H = \operatorname{tang} D';$$

si $D' < D$, a estrela está levantada; si $D' > D$, a estrela está deitada.

"Pondo o começo de um signo no horizonte é quazi impossivel que se coloque ahi realmente uma estrela. Não tem-se ponto de comparação para verificar pela observação si o rezultado do calculo é exato.

"Como essa passagem é importante, convem citar aqui as proprias palavras de Hiparco:

"Ἕκαστον γὰρ τῶν εἰρημένων ἀποδείκνυται διὰ τῶν γραμμῶν ἐν ταῖς καθόλου περὶ τῶν τοιούτων ἡμῖν συντεταγμέναις πραγματείας.

"Ele não diz mais do que isso; mas rezulta dahi evidentemente que ele demonstrou, <u>por uma figura</u>, tudo que acaba de expôr em detalhe; que a latitude e a declinação sendo dadas, deduz-se dahi o arco semi-diurno; que o ponto do paralelo que está no horizonte sendo dado, concluí-se dele o ponto que está no meridiano, o ponto culminante da eclitica, o ponto oriente da eclitica; o que fórma uma das operações trigonometricas mais longas e mais complicadas da Astronomia. Trata-se aqui de rezultados numericos, e não de teoremas geraes e metafizicos, tais como os de Autolycus ou de Theodozio. Isso é bem a Trigonometria esferica. Não conheço outra maneira de rezolver esses problemas. É, pois, muito para lamentar que tenhamos perdido esse Tratado no qual Hiparco tinha demonstrado esses metodos, então novos, e que tinha por titulo: Ἡ τῶν συνανα-

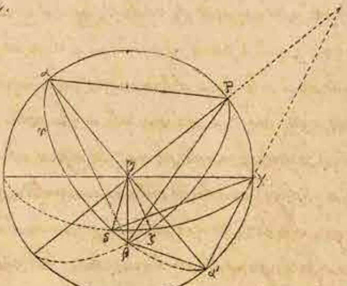
τολῶν πραγματεία, Tratado dos levantes simultaneos.

"Ajuntemos que ele tinha composto doze livros sobre o calculo das Taboas das cordas; assim a invenção era completa e nada faltava ao seu metodo. E só-mente para lamentar que Hiparco não tenha dado os seus teoremas que teriamos comparado com os que se achão em Ptolomeu, e que são talvez os mesmos.»

(Hist. Ast. Ant. I, 142-144).

Demonstrado pois, que Hiparco deve ter sido levado a instituir a Trigonometria esferica para rezolver o problema dos levantes simultaneos, vejamos qual foi a provavel filiação dos seus pensamentos. E' claro que ele não havia de ter começado por considerar o cazo que acabamos de ver apreciado por Delambre. Naturalmente o seu ponto de partida foi a hipoteze mais simples na qual se trata de determinar as estrelas que nacem e se deitão ao mesmo tempo na esfera obliqua, quando se conhece as que surgem e põe-se simultaneamente na esfera reta. Hiparco devia ter notado que a dificuldade consistia então em conhecer a diferença acencional, conforme acima observamos. De sorte que o problema reduzia-se a determinar tal diferença, quando fossem dadas a declinação e a acensão reta da estrela, bem como a latitude do lugar.

Suponhamos por exemplo a luzente das Hyadas (Adelbam) no horizonte oriental de Rhodes que foi o lugar das observações de Hiparco. A latitude é de 36° boreal. Conhece-se a decli-



nação βJ da estrela e a sua acensão reta $\gamma\beta$; quer-se a diferença acensional $\delta\beta$. A figura que se aprezenta espontaneamente é o triangulo $\delta\beta J$, retangulo em β, no qual se conhece assim o lado βJ e o angulo em δ que é medido pelo arco $\gamma\alpha'$; complemento da latitude. Hiparco sabia que com esses dados o triangulo estava determinado; a dificuldade era achar a relação entre a incognita e as grandezas conhecidas, isto é, entre o arco $\delta\beta$ e os arcos βJ e $\alpha'\gamma^x$. Ora este ultimo $\alpha'\gamma^x$ é o terceiro lado de um triangulo retangulo em α', e do qual faz parte o triangulo $\delta\beta J$. Portanto para achar a relação entre $\delta\beta$, βJ e $\alpha'\gamma^x$; Hiparco foi naturalmente induzido a comparar os triangulos $\delta\beta J$ e $\delta\alpha'\gamma^x$. Porem o conjunto dos antecedentes geometricos o levarão então a instituir a comparação entre as cordas, isto é, a substituir o confronto de curvas pelo das linhas retas ligadas a elas. Cumpria-lhes pois examinar as linhas retas que rezultavão da figura; as relações entre estas; e finalmente as relações entre as ditas retas e os arcos dos circulos.

Era portanto natural que ele substituisse aos triangulos esfericos $\beta\delta J$ e $\alpha'\delta\gamma$ os triangulos retilineos formados pelas cordas. Mas, para comparar a corda de δJ com a de $\delta\gamma$ ele era levado a imaginar o raio do circulo que vem a J e a procurar a relação entre os segmentos separados por esse raio na corda $\delta\gamma$. E, efetuando a comparação da corda βJ com a corda $\alpha'\gamma$, notou que o triangulo retilineo $\alpha'\delta\gamma$ corta o plano do circulo de declinação no qual se acha a corda βJ, segundo uma reta que é determinada pelos pontos em que as cordas $\alpha\delta$ e $\gamma\delta$ atravessão o dito plano, e que essa reta vinha cortar a corda $\alpha'\gamma$ prolongada até encontrar o prolongamento do eixo da esfera celeste ηP. Esta observação o conduziu a indagar as relações entre os segmentos e os lados de um triangulo retilineo em que dois lados fossem cortados por uma transversal prolongada até encontrar o prolongamento do terceiro lado. Ele viu tambem, ao mesmo tempo, que lhe cumpria investigar a relação entre os segmentos da secante e os arcos deter

minados por ela e um raio que a encontrasse.

Porem chegado a este ponto, Hiparco devia ter observado que o confronto do triangulo $\delta\beta\zeta$ com o triangulo $\alpha\delta\gamma$ não lhe permitiria rezolver o seu problema. Porque a relação a que chegasse conteria o lado $\delta\zeta$ que é desconhecido e não $\beta\zeta$, que é dado.

O exame geometrico fazia intervir o arco αP, cuja extremidade P era determinada pela interseção do prolongamento de $\beta\zeta$ com o prolongamento $\alpha\gamma$. Eis como Hiparco foi naturalmente levado a substituir a consideração do triangulo esferico pela de quatro arcos de circulo maximo, dois partindo do mesmo ponto e dois partindo dos extremos de um destes e dirigindo-se para o outro. Desde então a pesquiza da relação entre os elementos do triangulo esferico ficou reduzida á pesquiza da relação entre as cordas dos arcos rezultantes de tal conjunto[1].

O mesmo exame que acabava de efetuar lhe indicou o dezenlace de tal dificuldade, sugerindo-lhe o confronto do triangulo $\delta\beta\zeta$ com o triangulo $\alpha\beta P$. Com efeito, então as cordas $\alpha\beta$ e βP atravessão o horizonte em dois pontos que se achão em uma reta que vai passar pelo encontro do prolongamento do terceiro lado $\alpha\varepsilon$ com o prolongamento da meridiana $\eta\gamma$.

Geometricamente surge a necessidade da rezolução das mesmas questões e portanto a substituição dos quatro arcos de circulo maximo ao triangulo.

Assim, em rezumo, o problema astronomico dos <u>levantes</u> <u>simultaneos</u> conduziu ás seguintes questões abstratas:

1° Achar a relação entre os segmentos em que o raio divide a corda,

2° Achar a relação entre os segmentos mutuamente determinados por uma

---

(1) Influencia dos habitos algebricos de então, isto é, das <u>proporções</u> nas quais se considerão 4 termos.

transversal aos lados de um triangulo retilineo.

3º Deduzir dahi as relações entre as cordas e os segmentos das cordas de quatro arcos de circulos maximos dos quais dois partissem do mesmo ponto e os outros dois se dirigissem mutuamente da extremidade de cada um destes para o outro, cruzando-se portanto em certo ponto.

Porem é claro que tais relações não podião ser utilizadas sem que se tivesse construido ja a taboa das cordas. Dahi uma quarta questão que consistia em continuar os calculos a que Archimedes fora levado para a retificação do circulo. Mas a solução desta ultima questão era quanto bastava para rezolver os triangulos retilineos. A instituição sistematica da trigonometria esferica conduziu pois espontaneamente Hiparco a instituir a trigonometria retilinea; ao passo que dogmaticamente deve-se deduzir atualmente a trigonometria esferica da trigonometria retilinea. Rezolvendo definitivamente esta inversão da ordem historica, a Humanidade teve em vista a melhor coordenação dos seus pensamentos a vista do conjunto da sua evolução espontanea. Comprehende-se que na elaboração empirica das teorias scientificas não era possivel instituir desde logo a melhor harmonia entre o abstrato e o concreto por um lado, e entre as noções abstratas por outro. Foi depois de efetuadas todas as suas aquizições teoricas, que a Humanidade poude fazer o exame comparativo delas, decidir as que devião ser conservadas, e qual a ordem mais conveniente a guardar entre estas. Tal foi a missão que Ela confiou ao nosso Mestre como o seu supremo Interprete.

3. Apreciação especial da teoria preliminar por meio da qual Hiparco instituiu a trigonometria.

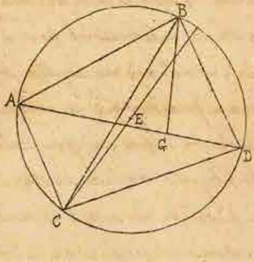
A vista do que precede, devemos atribuir a Hiparco a instituição do

teoremas geometricos cuja ligação com o problema astronomico que ele rezolveu acabamos de mostrar. Esses teoremas formão realmente os incidentes sucessivos de uma questão unica. O objeto de cada um deles ficou mesmo suficientemente caraterizado, salvo o ultimo, indispensavel para a construção da taboa das cordas. Mas a sua verdadeira natureza vai rezultar do exame da dificuldade que Hiparco tinha de vencer para completar as avaliações de Archimedes. Com efeito, em virtude de tais avaliações, é claro que, para continuar a taboa das cordas que elas espontaneamente esboçárão, bastava descobrir a relação entre a corda da soma ou a corda da diferença de dois arcos e as cordas desses arcos. Porque esta relação conduziria a conhecer a relação da corda de um arco para a corda do arco duplo, ou do arco subduplo. Portanto combinando convenientemente as cordas obtidas sucessivamente e os respetivos arcos se conseguiria levar a taboa tão longe quanto o exigissem as necessidades praticas. Ora, a filiação astronomica dos seus pensamentos geometricos tinhão conduzido Hiparco a comparar quatro arcos na esfera. Ele era pois espontaneamente conduzido, dados dois arcos e as respetivas cordas para achar a corda da soma ou da diferença dos mesmos arcos, a considerar o resto da circumferencia como formando dois arcos e a confrontar assim as seis cordas rezultantes. Por outra, Hiparco foi levado a examinar a relação entre as diagonais e os lados de qualquer quadrilatero inscritivel.

Tendo assim acabado de indicar com precizão a filiação dos pensamentos trigonometricos de Hiparco, resta-nos mencionar os teoremas a que ele chegou, isto é, as soluções que deu para as questões geometricas nas quais decompuzera o seu problema astronomico. Comecemos pelo teorema que serve de baze à construção das taboas.

Para descobrir a relação entre as diagonais e os lados do quadrilatero inscritivel, basta tirar de um dos vertices até a diagonal oposta uma reta que forme

com um dos lados que dele partem um angulo igual ao que o outro lado fórma com a segunda diagonal. A diagonal oposta fica assim decomposta em dois segmentos que se tornão as bazes de dois triangulos respectivamente similhantes aos que têm por baze comum a segunda diagonal. Comparando-se pois os lados homologos chega-se a duas proporções que transformadas em equações e somadas mostrão que o produto das diagonais é igual á soma dos produtos dos lados opostos.



(Triangulo BGD similhante a ABC, porque fez-se ∧ GBD = ∧ ABC; e ∧ BDG = ∧ ACB, por terem por medida $\frac{1}{2}$ do arco AB. Donde:

$$\frac{GD}{BD} = \frac{AC}{BC} \text{ ou } GD \times BC = BD \times AC$$

Triangulo ABG similhante a BCD, porque ∧ ABG = ∧ CBD; e angulo BAG = ∧ BCD. Donde:

$$\frac{AG}{AB} = \frac{DC}{CB} \text{ ou } AG \times CB = DC \times AB$$

E finalmente:

$$GD \times BC + AG \times BC = BD \times AC + DC \times AB$$

ou

$$(GD + AG)BC = AD \times BC = BD \times AC + DC \times AB$$

"Esta formula que exprime a relação entre seis cordas differentes, seria de mediocre utilidade, seria precizo conhecer cinco dessas cordas para concluir delas a sexta, mas ela admitte em cazos particulares simplificações que a tornão precioza."

(Delambre. Trig. dos Gregos)

Antes porem de proseguir na apreciação especial deste teorema convem recordar a apreciação filozofica do nosso Mestre.

"Diretamente rezultante da segunda lei de Thales, similhante equação absorve espontaneamente a lei dos tres quadrados, quando os angulos tornão-se retos. Mas a dogmatização final deve, pelo contrario, referi-la ao sistema das ligações emanadas dessa lei teocratica, entre todas as distancias mutuas de um numero qualquer de pontos arbitrariamente dispostos. Essas relações, que se multiplicão quando os pontos tornão-se mais numerozos, não cessão senão quando eles se reduzem a quatro. Se entretanto eles se achão então comprehendidos no mesmo plano, as suas seis distancias conservão ainda uma dependencia reciproca, especialmente indicada pela decompozição do quadrilatero em dois triangulos. Basta simplificá-la quando os angulos opostos são suplementares, para deduzir dela o teorema de Hiparco, assim tornado um dos corolarios da lei que ele a principio abraçara, segundo a admiravel circulação das verdades abstratas, necessariamente mais sensivel em geometria."

(Politica, III, p. 324).

Seja n o numero de pontos; o numero das distancias mutuas vem a ser o numero das combinações dois a dois ou $\frac{n(n-1)}{1.2}$; mas o numero de triangulos que essas distancias pódem formar não é o numero de combinações delas tres a tres. Porque muitas de tais distancias nem siquer se encontrão e outras se cruzão. E o que se póde verificar considerando qualquer cazo particular. Por exemplo, no mais simples deles, si tivermos 4 pontos em um plano, as distancias serão os lados do quadrilatero e as duas diagonais. Ora, nem os lados opostos nem as diagonais pódem entrar simultaneamente no mesmo triangulo. O numero dos triangulos é dado pelo numero de combinações dos pontos 3 a 3 ou $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; e cada um dos

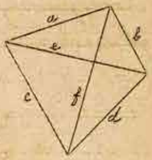
ses triangulos fornecerá uma equação entre tres das distancias. Teremos pois $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ equações entre $\frac{n(n-1)}{1.2}$ variaveis. Si esses dois numeros forem iguais, o numero de equações determina completamente as distancias. Si forem diferentes, ou haverá equações de condição ou o sistema será insuficiente para determinar as distancias. Isto quer dizer que, em um cazo, as distancias dadas não pódem pertencer a um sistema de pontos sem satisfazerem a certas condições; no outro cazo, que quaisquer distancias pódem ser consideradas como pertencendo a um certo sistema de pontos, salvo os limites vagamente indicados por dezigualdades. Reduzamos os dois numeros $\frac{n(n-1)}{1.2}$ e $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ ao mesmo denominador para melhor compará-los. Desde então o confronto se estabelece entre $3n(n-1)$ e $n(n-1)(n-2)$.

Antes de ir mais longe, notemos que $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ sendo inteiro, o seu menor valor é 1; donde $n(n-1)(n-2) = 1.2.3$ ou $n=3$; o que já se sabia, pois que, para ter um triangulo são precizos tres pontos. Então $\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{3.2}{1.2} = 3$; isto é, só haverá tres distancias mutuas, o que tambem já se sabia. Vejamos agora quando $\frac{n(n-1)}{1.2}$ e $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ serão iguais. Devemos ter $3n(n-1) = n(n-1)(n-2)$; o que supõe $3 = n-2$ ou $n=5$; isto é, que são dados cinco pontos. Dahi em diante $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ será maior do que $\frac{n(n-1)}{1.2}$; isto é, o numero de equações excederá cada vez mais o numero das distancias, e, portanto, o numero de ligações entre as distancias mutuas irá crecendo com o numero de pontos. No cazo de $n=4$, $\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{4.3}{1.2} = 6$; e $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$; o numero de equações é inferior ao das distancias, e as condições de determinação e de ligação cessão.

Mas si supuzermos que o quadrilatero é plano, isto é, que o quarto ponto está no plano dos outros tres, "as suas seis distancias conservão ainda uma dependencia reciproca, especialmente indicada pela decomposição do quadrilatero em dois triangulos. Basta simplificá-la quando os angulos opostos são suplementares, para deduzir dela o teorema de Hiparco."

Sejão a, b, c, d, os lados do quadrilatero, e e e f, as diagonais. Qualquer que seja a pozição dos quatro pontos teremos as equações:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a,b)$$
$$c^2 = a^2 + f^2 - 2af\cos(a,f)$$
$$d^2 = b^2 + f^2 - 2bf\cos(b,f)$$



Mas si o quarto ponto se achar no plano do triangulo abc, teremos mais a equação:

$$\angle(a,b) = \angle(a,f) + \angle(b,f)$$

ou trigonometricamente:

$$\cos(a,b) = \cos(a,f)\cos(b,f) - \mathrm{sen}(a,f)\,\mathrm{sen}(b,f).$$

Temos pois quatro equações entre as quais eliminando-se os angulos chegaremos á relação entre as diagonais e os lados de qualquer quadrilatero plano. Eis o calculo:

$$\cos(a,b) = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}$$
$$\cos(a,f) = \frac{a^2+f^2-c^3}{2af}$$
$$\cos(b,f) = \frac{b^2+f^2-d^2}{2bf}$$

Donde se deduz

$$\mathrm{sen}(a,f) = \sqrt{1 - \frac{(a^2+f^2-c^2)^2}{4a^2f^2}}$$

$$\mathrm{sen}(b,f) = \sqrt{1 - \frac{(b^2+f^2-d^2)}{4b^2f^2}}$$

E para a relação procurada:

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab} = \frac{a^2+f^2-c^2}{2af} \times \frac{b^2+f^2-d^2}{2bf} - \sqrt{\left[1 - \frac{(a^2+f^2-c^2)^2}{4a^2f^2}\right]\left[1 - \frac{(b^2+f^2-d^2)^2}{4b^2f^2}\right]}$$

Tal é a equação que convem simplificar antes de fazer a hipoteze dos angulos opostos do quadrilatero serem suplementares.

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab} = \frac{(a^2+f^2-c^2)(b^2+f^2-d^2)}{4f^2ab} - \frac{1}{4f^2ab}\sqrt{\left[4a^2f^2-(a^2+f^2-c^2)^2\right]\left[4b^2f^2-(b^2+f^2-d^2)^2\right]}$$

$$\frac{4f^2ab\,(a^2+b^2-e^2)}{2ab} = (a^2+f^2-c^2)(b^2+f^2-d^2) - \sqrt{\left[4a^2f^2-(a^2+f^2-c^2)^2\right]\left[4b^2f^2-(b^2+f^2-d^2)^2\right]}$$

Simplificando o primeiro membro e izolando o termo em que entrão as diagonais:

$$2f^2x^2 = 2f^2(a^2+b^2) - (a^2+f^2-c^2)(b^2+f^2-d^2) + \sqrt{[4a^2f^2-(a^2+f^2-c^2)^2][4b^2f^2-(b^2+f^2-d^2)^2]}.$$

Simplifiquemos separadamente, por comodidade, os termos independentes do radical e o radical:

$$2f^2x^2 + 2f^2b^2 - a^2b^2 - a^2f^2 + a^2d^2 - f^2b^2 - f^4 + d^2f^2 + c^2b^2 + c^2f^2 - c^2d^2 =$$

$$= f^2x^2 + f^2b^2 - a^2b^2 + a^2d^2 - f^4 + d^2f^2 + c^2b^2 + c^2f^2 - c^2d^2 =$$

$$= f^2(a^2+c^2-f^2) - b^2(a^2-c^2-f^2) - d^2(c^2-a^2-f^2)$$

Quanto ao radical, a simplificação rezulta da aplicação reiterada do principio que permite substituir a diferença de dois quadrados pelo produto da soma e da diferença das respetivas raizes.

$$\sqrt{[4a^2f^2-(a^2+f^2-c^2)^2][4b^2f^2-(b^2+f^2-d^2)^2]} =$$

$$= \sqrt{[2af+(a^2+f^2-c^2)][2af-(a^2+f^2-c^2)]} \times \sqrt{[2bf+(b^2+f^2-d^2)][2bf-(b^2+f^2-d^2)]} =$$

$$= \sqrt{[(a+f)^2-c^2][c^2-(a-f)^2][(b+f)^2-d^2][d^2-(b-f)^2]} =$$

$$= \sqrt{(a+f+c)(a+f-c)(c+a-f)(c-a+f)} \times \sqrt{(b+f+d)(b+f-d)(d+b-f)(d-b+f)}$$

ou grupando os fatores de outro modo:

$$\sqrt{[(a+c)+f][(a+c)-f][f+(a-c)][f-(a-c)]} \times \sqrt{[(b+d)+f][(b+d)-f][f+(b-d)][f-(b-d)]} =$$

$$= \sqrt{[(a+c)^2-f^2][f^2-(a-c)^2][(b+d)^2-f^2][f^2-(b-d)^2]} = \sqrt{(a^2+c^2+2ac-f^2)(f^2-a^2-c^2+2ac)(b^2+d^2+2bd-f^2)(f^2-b^2-d^2+2bd)} =$$

$$= \sqrt{[2ac+(a^2+c^2-f^2)][2ac-(a^2+c^2-f^2)][2bd+(b^2+d^2-f^2)][2bd-(b^2+d^2-f^2)]} = \sqrt{[4a^2c^2-(a^2+c^2-f^2)^2][4b^2d^2-(b^2+d^2-f^2)^2]} =$$

$$= \sqrt{4a^2c^2\left[1-\frac{(a^2+c^2-f^2)^2}{4a^2c^2}\right]4b^2d^2\left[1-\frac{(b^2+d^2-f^2)^2}{4b^2d^2}\right]} = 4acbd\sqrt{\left[1-\frac{(a^2+c^2-f^2)^2}{4a^2c^2}\right]\left[1-\frac{(b^2+d^2-f^2)^2}{4b^2d^2}\right]}$$

Onde se vê que os fatores sob o radical reprezentão os quadrados dos senos de dois

angulos opostos e o fator fóra do radical é o quadruplo do produto dos lados. Assim nós teremos para relação entre as diagonais e os lados a equação:

$$2f^2e^2=f^2(a^2+c^2-f^2)-b^2(a^2-c^2-f^2)-d^2(c^2-a^2-f^2)+4acbd\sqrt{\left[1-\frac{(a^2+c^2-f^2)^2}{4a^2c^2}\right]\left[1-\frac{(b^2+d^2-f^2)^2}{4b^2d^2}\right]}$$

Si o quadrilatero fôr inscritivel no circulo, os angulos opostos serão suplementares, e então ter-se-á:

$$\cos(a,c)=-\cos(b,d)$$

ou

$$\frac{a^2+c^2-f^2}{2ac}=-\frac{d^2+b^2-f^2}{2bd}=\frac{f^2-d^2-b^2}{2bd}$$

donde se tira:

$$a^2+c^2-f^2=\frac{2ac(f^2-b^2-d^2)}{2bd}=\frac{ac(f^2-b^2-d^2)}{bd}$$

$$a^2-c^2-f^2=a^2+c^2-f^2-2c^2=\frac{ac(f^2-b^2-d^2)}{bd}-2c^2=\frac{acf^2-acb^2-acd^2-2bdc^2}{bd}$$

$$c^2-a^2-f^2=a^2+c^2-f^2-2a^2=\frac{ac(f^2-b^2-d^2)}{bd}-2a^2=\frac{acf^2-acb^2-acd^2-2bda^2}{bd}$$

$$\frac{(a^2+c^2-f^2)^2}{4a^2c^2}=\frac{(d^2+b^2-f^2)^2}{4b^2d^2}$$

E, portanto, a equação supra se reduzirá a:

$$2f^2e^2=\frac{acf^4-acb^2f^2-acd^2f^2}{bd}-\frac{acb^2f^2-acb^4-acd^2b^2-2bdc^2b^2}{bd}-\frac{acd^2f^2-acb^2d^2-acd^4-2bda^2d^2}{bd}+$$
$$+4acbd\sqrt{\left[1-\frac{(b^2+d^2-f^2)^2}{4b^2d^2}\right]^2}$$

ou

$$2f^2e^2=\frac{acf^4-2acb^2f^2-2acd^2f^2+acb^4+2acb^2d^2+2bdc^2b^2+acd^4+2bda^2d^2}{bd}+$$
$$+\frac{4acbd}{4b^2d^2}\left(4b^2d^2-b^4-d^4-f^4-2b^2d^2+2b^2f^2+2d^2f^2\right)$$

Considerando, por comodidade, esta ultima parte, afim de prepará-la, ter-se-á:

$$4acbd + \frac{-acb^4 - acd^4 - acf^4 - 2acb^2d^2 + 2acb^2f^2 + 2acd^2f^2}{bd}$$

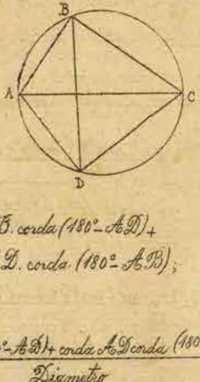
Vê-se então que a equação reduz-se a:

$$2f^2e^2 = 2c^2b^2 + 2a^2d^2 + 4acbd =$$
$$= 2(c^2b^2 + a^2d^2 + 2cb.ad) =$$
$$= 2(cb + ad)^2$$

ou, conforme o teorema de Hiparco:

$$fe = cb + ad$$

Bazeado nesse teorema, e considerando cazos particulares, Hiparco instituiu os teoremas fundamentais que lhe permitirão levar a construção das taboas das cordas tão longe quanto as necessidades praticas o exigião. Esses mesmos teoremas transformados pelos Arabes constituirão definitivamente a baze do estudo geral das relações entre as linhas trigonometricas.



Colocando o centro sobre uma diagonal, AC, por exemplo, a relação

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC,$$

torna-se:

$$\text{Diametro}.\text{corda}(AB + AD) = \text{corda}\,AB.\text{corda}(180^\circ - AD) + \text{corda}\,AD.\text{corda}(180^\circ - AB);$$

ou corda da soma de dois arcos:

$$\text{corda}(AB + AD) = \frac{\text{corda}\,AB\,\text{corda}(180^\circ - AD) + \text{corda}\,AD\,\text{corda}(180^\circ - AB)}{\text{Diametro}}$$

Colocando o centro sobre um lado, AC, por exemplo, a relação

$$AD.BC = AC.BD + AB.CD$$

ou

$$AC.BD = AD.BC - AB.CD$$

torna-se:

$$\text{Diametro.corda}\,(AD-AB) = \text{corda}\,AD.\text{corda}\,(180^\circ - AB) - \text{corda}\,AB.\text{corda}\,(180^\circ - AD)$$

ou corda da diferença de dois arcos:

$$\text{corda}\,(AD-AB) = \frac{\text{corda}\,AD.\text{corda}\,(180^\circ - AB) - \text{corda}\,AB.\text{corda}\,(180^\circ - AD)}{\text{Diametro}}$$

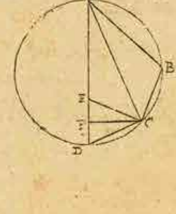
Se, na formula da corda da soma de dois arcos, supuzermos os dois arcos iguais, teremos:

$$AB = AD$$

$$\text{corda}\,2AB = \frac{2\,\text{corda}\,AB.\text{corda}\,(180^\circ - AB)}{\text{Diametro}}$$

Finalmente, Hiparco instituiu a formula que dá a corda da metade de um arco em formação da corda do suplemento do arco. Antes, porem, de transcrever a construção indicada por Delambre, observaremos que os gregos dividião o raio em 60 partes e portanto o diametro em 120. Cada parte era subdividida em 60 minutos; cada minuto em 60 segundos; cada segundo em 60 terços. Esta divizão se filia á do circulo, pois que o raio é o lado do exagono regular inscrito, isto é, é a corda de 60 graus. Os minutos, segundos e terços das <u>partes</u> do raio não se devem aliás confundir com os minutos, segundos e terços de <u>graus</u>.

Eis agora o trecho de Delambre a que nos referimos:



« Seja $BC = CD = \frac{1}{2} BD$; tirai AB, AC, e $CE = CD$; abaixai a perpendicular CF sobre o diametro AD.

Por cauza de $CE = CD = CB$, o triangulo

ECD é izoceles e $EF = DF = \frac{1}{2} ED$, $BAC = CAE$, $BC = CE$, AC é comum; portanto $AE = AB$.

Ora

$$AD : CD :: CD : DF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2}(AD - AE) = \frac{1}{2}(AD - AB)$$

ou

$$\text{corda } 180° : \text{corda } \tfrac{1}{2} BD :: \text{corda } \tfrac{1}{2} BD : \tfrac{1}{2}(AD - AB),$$

$$\left(\text{corda } \tfrac{1}{2} BD\right)^2 = \tfrac{1}{2} \text{ corda } 180° (AD - AB) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{ corda } 180° \left[\text{corda } 180° - \text{corda } (180° - BD)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} (\text{corda } 180°)^2 \left[1 - \frac{\text{corda } (180° - BD)}{\text{corda } 180°}\right]$$

ou em geral

$$\text{corda } \tfrac{1}{2} A = 120^p \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left[1 - \frac{\text{corda } (180° - A)}{120^p}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \text{corda } B = 120^p \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left[1 - \frac{\text{corda } (180° - 2B)}{120^p}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(Hist. da Astr. Antiga II, p. 40-41)

• •

Por meio desses teoremas e de outros que já lhe davão o valor de certas cordas bem como por bissecções continuas, Hiparco chegou á corda de 6°, de 3°, e de 1°30' e de 0°45'.

"Vendo que as cordas de 0°45', de 1°30', e de 3°, formão uma progressão arimetica, ele[1] podia concluir que a corda de 30' é os dois terços da de 0°45' (30=

---

[1] Delambre refere-se a Ptolomeu de quem faço extrato; mas essas considerações devem ser aplicadas a Hiparco, desde que é ele o fundador da Trigonometria.

R. T. M.

$= 2.15 = \frac{2}{3} \cdot 45$) e o terço da de 1°30' ($1°30' = 90' = 3.30'$ ou $30' = \frac{1}{3}\,90'$).

Mas ele demonstra que o processo, sem ser absolutamente rigorozo, é pelo menos suficientemente exato» (Ibidem)

Delambre indica essa demonstração, observando que é curioza e de um genero que não se encontra mais nos autores modernos. É natural que Hiparco tendo apanhado por indução que as cordas suficientemente pequenas podem ser consideradas como proporcionais aos arcos, se tivesse certificado por uma demonstração direta.

«Com a corda de 30' e por consequencia a de 179°30' e as formulas corda (A+B) e corda (A−B), concebe-se que Ptolomeu(1) tenha podido preencher todos os vazios de sua taboa da qual ele tinha calculado uma parte pelas outras formulas.

«Esta construção da Taboa das cordas é extremamente simples, os modernos muito lhe ajuntarão, mas eles nada ahi suprimirão, e todos esses teoremas de Ptolomeu ou de Hiparco serão para sempre o fundamento da Trigonometria.»

(H. A. A. II, 44)

Convem não esquecer que é a Hiparco que cabe toda a gloria e que, nessa construção, conforme a apreciação de nosso Mestre, ele foi o continuador do trabalho que Archimedes fôra espontaneamente levado a fazer para determinar a relação da circumferencia para o diametro.

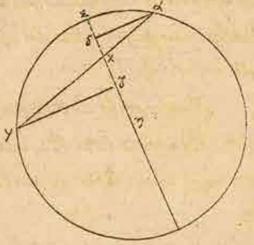
Tendo assim terminado a indicação do modo pelo qual Hiparco rezolveu a questão preliminar relativa á <u>construção da Taboa das cordas</u>, devemos passar

---

(1) Leia-se Hiparco.

R. T. M.

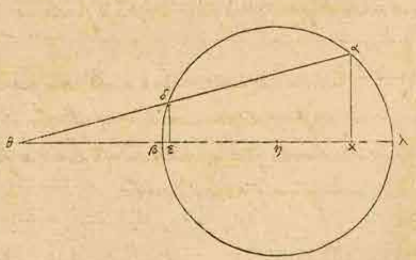
ao teoremas que lhe permitirão rezolver os problemas trigonometricos. Os primeiros desses teoremas referem-se, como dissemos, ás relações entre os segmentos determinados em uma corda por um raio que a corta. Vê-se logo que ha dois cazos a considerar, conforme o indicava a figura astronomica; porque o raio pode cortar a corda, ou então o prolongamento desta ser cortado pelo prolongamento do raio.



Ora é facil de ver que qualquer raio divide a corda de um arco dado em segmentos proporcionais ás cordas dos arcos duplos daquelles que o mesmo raio separa no arco; ou

$$\frac{\gamma\chi}{\alpha\chi}=\frac{\gamma\zeta}{\alpha\delta}=\frac{2\gamma\zeta}{2\alpha\delta}=\frac{\text{corda } 2\gamma\varepsilon}{\text{corda } 2\alpha\varepsilon}$$

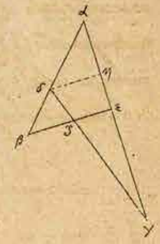
Percebe-se com a mesma facilidade que quando a secante é encontrada pelo prolongamento de um raio, a parte externa della está para o total assim como as cordas dos dobros dos arcos comprehendidos entre a secante e o raio estão entre si; ou, o que é o mesmo, como a corda do dobro do menor desses arcos



está para a corda do dobro da soma dele com o que é subtendido pela secante. Isto é

$$\frac{\theta\delta}{\theta\alpha}=\frac{\text{corda } 2\beta\delta}{\text{corda } 2\alpha\lambda}=\frac{\text{corda } 2\beta\delta}{\text{corda } 2\beta\alpha}.$$

Vejamos agora as propriedades da transversal aos lados do triangulo retilineo. Semilhante exame bazeia-se no cazo em que a transversal é paralela a um dos lados e donde rezultou o 2.° teorema de Thales.



Seja o triangulo $\alpha\beta\varepsilon$ cujos lados são cortados pela transversal $\underline{\delta\gamma}$. Tire-se, pelo ponto em que a transversal encontra o lado mais distante da sua interseção com o prolongamento do terceiro lado, uma reta ($\delta\eta$) paralela ao segundo lado. Ter-se-á

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} = \frac{\varepsilon\beta}{\delta\eta} = \frac{\varepsilon\beta}{\delta\eta} \cdot \frac{\zeta\varepsilon}{\zeta\varepsilon} = \frac{\varepsilon\beta}{\zeta\varepsilon} \cdot \frac{\zeta\varepsilon}{\delta\eta}$$

ou

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} = \frac{\varepsilon\beta}{\zeta\varepsilon} \cdot \frac{\zeta\gamma}{\delta\gamma} \qquad \text{(1.° lema) (utilizado)}$$

Assim, quando uma transversal corta dois lados de um triangulo, a razão do lado mais afastado do encontro dela com o prolongamento do terceiro para o segmento não contiguo ao vertice comum dos primeiros lados, é igual á razão do outro lado para o segmento analogo, multiplicada pela razão da parte externa da transversal para a transversal total.

Da equação

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} = \frac{\varepsilon\beta}{\zeta\varepsilon} \cdot \frac{\zeta\gamma}{\delta\gamma},$$

deduz-se:

$$\frac{\zeta\gamma}{\delta\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} \cdot \frac{\zeta\varepsilon}{\varepsilon\beta} \qquad \text{(1.° lema invertido)}$$

Para concebê-la com a maior comodidade, convem considerar que no triangulo $\underline{\zeta\gamma\varepsilon}$ dois lados ($\gamma\zeta$, $\zeta\varepsilon$) são prolongados alem do vertice comum, e que esses prolongamentos é que são cortados por uma transversal que vai encontrar o prolongamento do terceiro lado. Então a formula supra dá o seguinte enunciado:

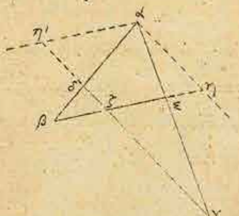
Prolongando, alem do vertice comum, os dois lados de um triangulo e cortando esses prolongamentos por uma transversal, a razão do lado mais remoto do encontro desta com o prolongamento do 3.º lado ($\zeta\gamma$) para o mesmo lado e o seu prolongamento ($\delta\gamma$), é igual á razão do 2.º lado ($\zeta\varepsilon$) para este com o respetivo prolongamento ($\varepsilon\beta$), multiplicada pela razão da transversal até o terceiro lado ($\alpha\beta$) para o prolongamento dela ($\alpha\delta$).

Da mesma equação, deduz-se o 2.º lema:

$$\frac{\varepsilon\zeta}{\beta\varepsilon}=\frac{\alpha\delta}{\alpha\beta}\cdot\frac{\zeta\gamma}{\delta\gamma} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta\varepsilon}{\varepsilon\zeta}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\delta}\cdot\frac{\delta\gamma}{\zeta\gamma}$$

Ou, em portuguez, a razão do lado mais proximo do encontro da transversal com o prolongamento do 3.º lado para o segmento não contiguo e o vertice comum é igual á razão do outro lado para o segmento analogo, multiplicada pela razão da transversal total para a sua parte externa.

Estes lemas referem-se á relação dos lados para os segmentos; resta-nos a considerar as relações dos segmentos entre si.



Seja o triangulo $\alpha\gamma\delta$ cortado pela transversal $\varepsilon\beta$. Da extremidade do terceiro lado oposto a sua interseção com a transversal tirem-se duas retas respetivamente paralelas ao lado oposto e á transversal. Virá:

$$\frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon\gamma}=\frac{\zeta\eta'}{\zeta\gamma}\cdot\frac{\delta\zeta}{\delta\zeta}=\frac{\delta\zeta}{\zeta\gamma}\cdot\frac{\zeta\eta}{\delta\zeta} \qquad \eta'\zeta=\alpha\eta \qquad \frac{\zeta\eta'}{\delta\zeta}=\frac{\alpha\eta}{\delta\zeta}=\frac{\alpha\beta}{\delta\beta}$$

Donde

$$\frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon\gamma}=\frac{\delta\zeta}{\zeta\gamma}\cdot\frac{\alpha\beta}{\delta\beta} \quad \text{(3.º lema) (utilizado)}$$

Ou, em linguagem vulgar, quando uma transversal corta dois lados de um triangulo e o prolongamento do terceiro, a relação entre os segmentos do lado mais remoto da ultima interseção (o antecedente sendo a parte não contigua ao vertice comum) é igual á razão entre os segmentos analogos do segundo lado, multiplicada pela razão do terceiro lado e o seu prolongamento para este prolongamento.

Da equação precedente, tira-se:

$$\frac{\delta\zeta}{\zeta\gamma} = \frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\delta\beta}{\alpha\beta} \quad (4.^{\circ}\text{ lema})$$

Ou, em linguagem vulgar, a relação entre os segmentos do lado mais proximo da interseção da transversal com o 3.° lado é igual á razão entre os segmentos analogos do outro lado, multiplicada pela razão do prolongamento do terceiro lado para o mesmo lado com o seu prolongamento.

Da mesma equação deduz-se tambem:

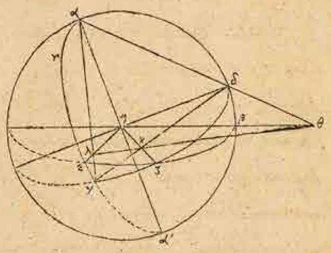
$$\frac{\delta\beta}{\alpha\beta} = \frac{\delta\zeta}{\zeta\gamma} \cdot \frac{\varepsilon\gamma}{\varepsilon\alpha} \quad (3.^{\circ}\text{ lema invertido})$$

Ou, a razão do prolongamento do terceiro lado para este com o seu prolongamento é igual á razão dos segmentos do lado mais proximo da interseção do 3.° lado com a transversal, multiplicada pela razão inversa dos segmentos analogos do segundo lado.

4. Apreciação especial da maneira pela qual Hiparco instituiu a rezolução dos triangulos esfericos e retilineos.

Estes lemas vêm no Comentario de Theon sobre a <u>Sintaxe</u> de Ptolomeu,

rezumido na *Historia da Astronomia Antiga* de Delambre. Bazeado neles é que o comentador aprezenta as formulas da trigonometria esferica, que, como se vê, se deduzem das propriedades dos triangulos retilineos. De sorte que esta dedução oferece esta circunstancia notavel, que as equações entre as cordas dos arcos traçados em uma esfera se tirão das relações entre linhas retas traçadas em um só plano. Delambre diz que Ptolomeu só dá duas formulas, ás quais Theon ajunta mais duas. É portanto provavel que Hiparco só tivesse considerado os cazos mencionados por Ptolomeu e que de fato bastavão ao seu objetivo. Eis estas formulas:



1ª formula. A primeira das mencionadas formulas surge do problema astronomico de que acima falamos, e que consiste em determinar a diferença acencional quando se conhece a declinação do astro e a latitude do lugar. Mostramos que trata-se então, com efeito, de determinar uma relação entre os arcos $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\varepsilon$, e $\gamma\delta$, e os seus segmentos. Considera-se o triangulo retilineo formado pelas cordas dos arcos $\alpha\delta$ (distancia do polo ao equador $= 90°$), $\alpha\gamma$ (arco semi-diurno). e $\delta\gamma$ (distancia do polo ao equador contada no circulo de declinação do astro $= 90°$). A transversal do triangulo é a reta que une os pontos em que as cordas $\gamma\alpha$ e $\gamma\delta$ e o prolongamento da corda $\alpha\delta$ atravessão o horizonte. Esses pontos se achão na interseção das ditas cordas e prolongamento com os raios da esfera celeste que vão ao oriente, ao astro e ao extremo norte da mediana, no cazo figurado.

O terceiro lema nos dará:

$$\frac{\gamma\lambda}{\lambda\alpha} = \frac{\gamma\chi}{\delta\chi} \cdot \frac{\delta\theta}{\alpha\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda\alpha}{\gamma\lambda} = \frac{\delta\chi}{\gamma\chi} \cdot \frac{\alpha\theta}{\delta\theta};$$

e substituindo estes segmentos pelas cordas dos arcos convenientes, segundo os teoremas precedentes:

$$\frac{\text{corda } 2\gamma\varepsilon}{\text{corda } 2\lambda\varepsilon} = \frac{\text{corda } 2\gamma\zeta}{\text{corda } 2\zeta\delta} \cdot \frac{\text{corda } 2\beta\delta}{\text{corda } 2\beta\alpha}.$$

Esta formula geral dará no cazo particular considerado:

$$\frac{\text{corda } 2\gamma\varepsilon}{\text{corda } 180^\circ} = \frac{\text{corda 2 declinação de } \zeta}{\text{corda } (180^\circ - 2 \text{ decl. } \zeta)} \cdot \frac{\text{corda 2 lat. do lug.}}{\text{corda } (180^\circ + 2 \text{ lat. lug.})}$$

Pode-se pois obter $\gamma\varepsilon$ que é a unica incognita nesta formula. $\gamma\varepsilon$ é a diferença acencional de ζ. $\gamma\varepsilon + 90^\circ$ daria a Hiparco o arco semi-diurno. E, si fosse conhecida a acenção reta de ζ, ele deduziria dela a acenção obliqua dos astros que então se achavão no horizonte oriental. Determinada assim a pozição do ponto vernal, lhe era facil ter o ponto do equador que estava, ao mesmo tempo no meridiano.

Independentemente, porem, desse rezultado concreto, Hiparco devia ter atentado então no carater abstrato da simplificação pela qual a sua formula geral acabava de passar. Com efeito, em vez de uma relação entre seis arcos, ele chegara a uma relação entre tres arcos, graças ao fato de ser alguns dos arcos do problema iguais a 90°. Era pois natural que examinasse a figura no intuito de apanhar a significação geometrica da equação simplificada.

Ora, o exame da figura mostra que os arcos $\gamma\varepsilon$ e $\zeta\gamma$ são os lados do triangulo retangulo $\zeta\varepsilon\gamma$, cujo angulo reto tem o vertice em γ. Quanto á latitude $\beta\delta$, é o complemento do angulo agudo do equador com o horizonte, isto é, o complemento de $\beta\alpha'$, ou do angulo que tem o vertice em ε no triangulo esferico $\zeta\varepsilon\gamma$. A mesma figura mostra que a corda de $2\beta\alpha$ é igual á corda de $2\beta\alpha'$; isto é, corda do dobro do dito angulo que tem o vertice em ε no referido triangulo. Portanto, dar a latitude equivale a dar o angulo $\underline{\varepsilon}$ do triangulo esferico retangulo $\zeta\varepsilon\gamma$. In-

troduzindo este angulo, a formula supra fica:

$$\frac{\text{corda } 2\cdot\Upsilon\Sigma}{\text{corda } 180^\circ} = \frac{\text{corda } 2\,\text{decl.}\,\Sigma}{\text{corda}(180^\circ - \text{decl.}\,\Sigma)} \cdot \frac{\text{corda}(180^\circ - 2\,\text{compl. lat.})}{\text{corda } 2\,\text{compl. lat.}}$$

Assim Hiparco chegou á formula que dá a relação entre os dois lados de um triangulo e um dos angulos agudos. Esta formula permite conhecer qualquer desses elementos quando os outros dois forem dados.

Similhante rezultado devia sugerir a Hiparco o projeto de rezolver os outros cazos dos triangulos retangulos esfericos; não só porque as questões astronomicas os aprezentão, mas tambem porque era facil perceber que todo triangulo esferico, da mesma sorte que o triangulo retilineo, pode ser decomposto em dois triangulos retangulos. Desde então a rezolução destes constituiria a baze da trigonometria esferica.

Antes de proseguir, Hiparco deve pois ter examinado quais as formulas de que carecia para rezolver qualquer triangulo retangulo esferico, ou, pelo menos, aqueles que a Astronomia lhe podia oferecer. Ora, em primeiro lugar era facil de ver que o triangulo triretangulo não dava lugar a nenhuma questão, pois que os lados serião então quadrantes. No mesmo cazo estavão os triangulos biretangulos, porque os dois lados opostos aos angulos retos serão quadrantes e o terceiro lado será a medida do terceiro angulo e reciprocamente. Só restava, pois, a considerar o cazo em que existia um unico angulo reto. Então o triangulo contem cinco elementos variaveis (dois angulos e tres lados) dois dos quais sendo conhecidos determinão os outros tres. Isto mostra que ha seis cazos a considerar na rezolução dos triangulos esfericos retangulos. Porem desses seis cazos, ha um que nunca se encontra em Astronomia: é aquele em que são dados os dois angulos obliquos. Hiparco só precizava de formulas para rezolver as cinco hipotezes restantes.

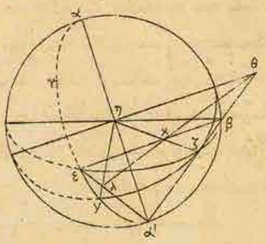
Tratando-se de uma questão em que o ponto de vista pratico deve dominar, convem ainda notar que as formulas necessarias não são unicamente aquelas que, em abstrato, serião suficientes. Porque nem sempre nos interessa conhecer todos os elementos de um triangulo. As formulas devem pois ser tais que nos permitão calcular diretamente, por meio dos elementos conhecidos, o elemento qualquer que se precizar na ocazião. Tal era a condição a que Hiparco devia atender. Assim a pratica dispensava-o de tomar em consideração um cazo da rezolução dos triangulos; mas o obrigava, por outro lado, a instituir maior numero de formulas para os outros do que as que serião imprecindiveis em abstrato.

Examinando, segundo essas presorições, as formulas de que carecia, Hiparco reconheceu que só precizava de quatro formulas, das quais uma era justamente aquela que acabava de obter; isto é, a que exprime a relação entre os dois e um dos angulos agudos. As outras tres devião caraterizar: a) a relação entre a hipotenuza, um lado, e o angulo adjacente; b) a relação entre a hipotenuza, um lado, e o angulo oposto; c) a relação entre a hipotenuza e os dois lados.

Isto posto, a lei fundamental da Filozofia Primeira devia induzi-lo a ver si as outras formulas podião rezultar de hipotezes particulares sobre os arcos da figura que acabava de fornecer-lhe a primeira delas. Ora, reparando que, nessa figura, dois dos arcos são quadrantes, Hiparco era naturalmente levado a supor o cazo em que os dois outros tambem o fossem, o que era justamente o que se lhe aprezentara a principio.

Com efeito, os arcos que se aprezentavão, erão: partindo do mesmo ponto L', o quadrante do equador (L'Y) e o quadrante do meridiano (L'S); e, partindo do oriente para o norte, o quadrante do horizonte; par-

tindo do polo norte para o equador o circulo de declinação do astro que estava no horizonte oriental. O exame do seu problema lhe patentearia que o confronto do triangulo εγζ, formado pela diferença acencional do astro com a sua declinação e a sua amplitude ortiva, com o triangulo εα'β formado por um quadrante do equador com o do horizonte e o arco do meridiano que vão ao norte do horizonte, conduzia-o a uma expressão contendo a difrença acencional e a amplitude ortiva, bem como o angulo formado por ambas estas. Isto é, em abstrato, Hiparco teria uma expressão contendo um lado, a hipotenuza, e o angulo adjacente áquele. Com efeito, a formula supra nos dará:

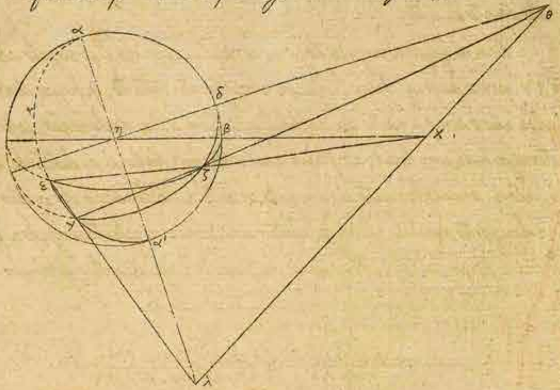


$$\frac{\text{corda } 2\gamma\varepsilon}{\text{corda }(180^\circ - 2\gamma\varepsilon)} = \frac{\text{corda } 2\varepsilon\zeta}{\text{corda }(180^\circ - 2\varepsilon\zeta)} \cdot \frac{\text{corda }(180^\circ - 2\alpha'\beta)}{\text{corda } 180^\circ}$$

Esta formula contendo a hipotenuza, um lado, e o angulo agudo adjacente a este, permite determinar qualquer desses elementos quando os outros dois forem conhecidos.

A mesma figura sugere a consideração de outros triangulos retilineos ligados ás cordas dos arcos em questão, e que permitem deduzir as outras duas equações cuja necessidade Hiparco reconhecera. Assim, para ter a relação entre os tres lados, basta considerar o triangulo εγζ formado pela corda da amplitude ortiva com as cordas da diferença acencional e da declinação. O plano deste triangulo vai cortar o do meridiano segundo uma linha reta da qual temos tres pontos imaginando prolongados os raios da esfe-

ra celeste que vão respetivamente ao polo norte, ao norte do horizonte, e à intersecção do equador com o meridiano inferior. Obtem-se assim o triangulo $\varepsilon\lambda\chi$ formado pelas cordas prolongadas da diferença acencional e da



amplitude ortiva com a referida reta; triangulo cortado pela transversal que é a corda da declinação prolongada até encontrar o eixo da esfera celeste. Então o primeiro lema nos dará:

$$\frac{\varepsilon\lambda}{\gamma\lambda} = \frac{\varepsilon\chi}{\zeta\chi} \cdot \frac{\zeta\theta}{\gamma\theta}$$

ou

$$\frac{\text{corda } 2\alpha\varepsilon}{\text{corda } 2\gamma\alpha'} = \frac{\text{corda } 2\varepsilon\beta}{\text{corda } 2\zeta\beta} \cdot \frac{\text{corda } 2\zeta\delta}{\text{corda } 2\gamma\delta}$$

que é a segunda das formulas gerais dadas por Ptolomeu e que devemos atribuir a Hiparco. No caso figurado, ela torna-se:

$$\frac{\text{corda } 180^\circ}{\text{corda } (180^\circ - 2\varepsilon\gamma)} = \frac{\text{corda } 180^\circ}{\text{corda } (180^\circ - 2\varepsilon\zeta)} \cdot \frac{\text{corda } (180^\circ - 2\gamma\zeta)}{\text{corda } 180^\circ}$$

ou

$$\frac{\text{corda } (180^\circ - 2\varepsilon\gamma)}{\text{corda } 180^\circ} = \frac{\text{corda } (180^\circ - 2\varepsilon\zeta)}{\text{corda } (180^\circ - 2\gamma\zeta)};$$

o que dá uma equação entre a diferença acencional ($\varepsilon\gamma$), a amplitude ortiva ($\varepsilon\zeta$) e a declinação ($\gamma\zeta$); isto é, entre os tres lados do triangulo retangulo. Só fica faltando pois a equação entre a hipotenuza, um lado e o angulo oposto a este.

Ora, a figura sugere logo a consideração do triangulo retangulo $\delta\zeta\gamma$, como capaz de satisfazer similhante intuito, porque dois dos seus lados são o complemento da amplitude ortiva e da declinação, isto é, da hipotenuza e de um lado, ao passo que o terceiro lado é a latitude do lugar, isto é, o complemento do angulo oposto á declinação do astro que está no horizonte oriental. Desde então aplicando a este triangulo a formula que acaba de ser obtida, Hiparco chegava a sua quarta formula. Assim, em virtude da formula precedente ele tinha:

$$\frac{\text{corda } (180^\circ - 2\zeta\beta)}{\text{corda } 180^\circ} = \frac{\text{corda } (180^\circ - 2\delta\zeta)}{\text{corda } (180^\circ - 2\delta\beta)}$$

ou substituindo $\zeta\gamma$, $\delta\zeta$ e $\delta\beta$, pelos seus complementos:

$$\frac{\text{corda } 2\varepsilon\zeta}{\text{corda } 180^\circ} = \frac{\text{corda } 2\gamma\zeta}{\text{corda } 2\alpha'\beta}$$

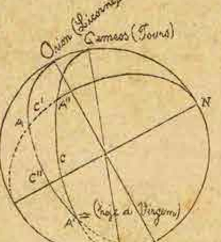
Equação que carateriza a relação entre a hipotenuza ($\varepsilon\zeta$), o lado ($\gamma\zeta$), e o angulo oposto a este (ε, que tem por medida $\alpha'\beta$).

Hiparco obteve assim tudo quanto precizava para rezolver os triangulos retangulos esfericos. Antes de aprezentar, para rezumir o que precede, o conjunto dessas formulas, convem notar a mutua relação que existe entre os lados e os angulos dos dois triangulos retangulos ($\varepsilon\gamma\zeta$ e $\zeta\delta\beta$) considerados, e que rezultão da interseção de dois pares de quadrantes de circulos maximos nos quais o vertice de cada par é o polo do circulo mais distante do outro par. Alem dos angulos retos, esses triangulos têm dois angulos respetivamente iguais como ver-

ticalmente opostos. E os quatro elementos restantes de cada triangulo são os complementos dos elementos dos outros. Tais triangulos chamão-se por isso complementares. E vê-se, por ahi, que qualquer relação estabelecida entre os elementos de um conduz logo a uma relação entre elementos do outro, o que importa, em abstrato, em uma nova equação entre os elementos de um triangulo retangulo. Efetuando o confronto para todos os cazos, é facil de reconhecer que as formulas que acabamos de obter permitem instituir as seis de que se carece para rezolver diretamente todos os cazos dos triangulos retangulos esfericos. Ora, não é crivel que tivessem passado despercebidas a Hiparco as relações que existem entre os elementos dos triangulos complementares. Devemos, pois, concluir que ele conhecia todas essas formulas, e que a trigonometria grega era completa sob esse aspeto.

Algumas dessas formulas não sendo utilizadas em Astronomia, o grau de precizão então accessivel havendo feito em breve prevalecer os metodos graficos sobre os processos algebricos, se explica porque delas não subzistem vestigios nos livros da siencia grega que chegárão até nós.

Rezumamos agora as formulas de que se trata, deduzindo-as umas das outras, por intermedio dos triangulos complementares. Mas, para lembrar a origem astronomica das formulas de Hiparco e combinar portanto a logica das imagens e dos sinais com a dos sentimentos, as ligaremos aos problemas celestes.



Apenas, nas formulas abstratas, adotaremos a notação de Delambre, dezignando os angulos por A, A', A'' (inicial de angle) e os lados por C, C', C'' (inicial de coté) observando que os mesmos acentos correspondem a angulos e lados opostos e

que A é o angulo reto.

Isto posto, a formula de Hiparco para os tres lados era: (pg. 47)

$$\frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2\varepsilon Y)}{\text{corda}\,180^\circ} = \frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2\varepsilon J)}{\text{corda}\,(180^\circ - 2YJ)}$$

na qual εJ (amplitude ortiva) dezigna a hipotenuza; ou

$$\text{corda}\,(180^\circ - 2\varepsilon J) = \frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2\varepsilon Y)\,\text{corda}\,(180^\circ - 2YJ)}{\text{corda}\,180^\circ}$$

Com as notações de Delambre, esta formula se tornará:

1ª formula:

$$\text{corda}\,(180^\circ - 2C) = \frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2C')\,\text{corda}\,(180^\circ - 2C'')}{\text{corda}\,180^\circ}$$

Introduzindo o triangulo complementar N'GA'', esta formula nos dará a segunda. Para isso, note-se que este triangulo é retangulo em G e que os angulos A'' são iguais como verticalmente opostos. Demais tem-se: $C = 90^\circ - GA''$, $C' = 90^\circ - NA''$; $C'' = 90^\circ - AO$. Ora AO é a medida do angulo N; portanto a ultima expressão dá $C'' = 90^\circ - N$. Substituindo esses valores de C, C', C'' na primeira formula, virá

$$\text{corda}\ 2GA'' = \frac{\text{corda}\ 2NA''\,\text{corda}\ 2N}{\text{corda}\,180^\circ}$$

ou, na notação de Delambre:

2ª formula:

$$\text{corda}\ 2C' = \frac{\text{corda}\ 2C.\ \text{corda}\ 2A'}{\text{corda}\,180^\circ}$$

Esta formula exprime a relação entre um lado, a hipotenuza, e o angulo oposto ao lado.

Tomemos para 3ª formula a que exprime a relação entre os dois lados e um dos angulos agudos e que parece ter sido a primeira obtida por

Hiparco (folhas 43-44):

$$\frac{\text{corda } 2\gamma\varepsilon}{\text{corda } 180^\circ} = \frac{\text{corda } 2 \text{ decl.} \Upsilon}{\text{corda } (180^\circ - 2 \text{ decl.} \Upsilon)} \cdot \frac{\text{corda } (180^\circ - 2 \text{comp. lat.})}{\text{corda } 2 \text{ comp. lat.}}$$

na qual $\gamma\varepsilon$ e a declinação são os lados e o complemento da latitude é o angulo adjacente a $\varepsilon\gamma$. Portanto na notação de Delambre, esta formula se torna:

$$\frac{\text{corda } 2C'}{\text{corda } 180^\circ} = \frac{\text{corda } 2C''}{\text{corda}(180^\circ - 2C'')} \cdot \frac{\text{corda } (180^\circ - 2A'')}{\text{corda } 2A''}$$

Esta formula pode servir para determinar os angulos, quando os dois lados forem conhecidos; ou um dos lados quando o outro fôr conhecido com um dos angulos agudos. Porem, neste ultimo cazo, ela é sucetivel de dois aspetos, conforme o lado que se procura é oposto ou adjacente ao angulo dado. Suponhamos que o lado procurado é oposto ao angulo dado; então cumpre rezolver a equação em relação a C'' o que dará:

3ª formula:

$$\frac{\text{corda } 2C''}{\text{corda } (180^\circ - 2C'')} = \frac{\text{corda } 2C' \text{corda } 2A''}{\text{corda } 180^\circ \text{corda } (180^\circ - 2A'')}$$

Introduzindo o triangulo complementar, obteremos a

4ª formula:

$$\frac{\text{corda } (180^\circ - 2N)}{\text{corda } 2N} = \frac{\text{corda } (180^\circ - 2A''N) \text{corda } 2A''}{\text{corda } 180^\circ \cdot \text{corda } (180^\circ - 2A'')}$$

ou, na notação de Delambre:

$$\frac{\text{corda } (180^\circ - 2A')}{\text{corda } 2A'} = \frac{\text{corda } (180^\circ - C) \text{corda } 2A''}{\text{corda } 180^\circ \cdot \text{corda}(180^\circ - 2A'')}$$

Formula que exprime a relação entre a hipotenuza e os dois angulos agudos.

Si supuzermos conhecidos os lados C' e C'' e quizermos calcular o angulo oposto a C' a nossa formula 3ª dará:

$$\frac{\text{corda } 2C'}{\text{corda }(180^\circ - 2C')} = \frac{\text{corda } 2C''.\text{corda } 2A'}{\text{corda } 180^\circ \text{corda }(180^\circ - 2A'')}$$

E introduzindo o triangulo complementar virá:

$$\frac{\text{corda }(180^\circ - 2A''N)}{\text{corda } 2A''N} = \frac{\text{corda }(180^\circ - 2N).\text{corda }(180^\circ - 2GN)}{\text{corda } 180^\circ.\text{corda } 2GN}$$

ou, na notação de Delambre:

$$\frac{\text{corda }(180^\circ - 2C)}{\text{corda } 2C} = \frac{\text{corda }(180^\circ - 2A').\text{corda }(180^\circ - 2C'')}{\text{corda } 180^\circ \text{corda } 2C''}$$

ou, <u>5ª formula</u>:

$$\frac{\text{corda } 2C''}{\text{corda }(180^\circ - 2C'')} = \frac{\text{corda }(180^\circ - 2A')\text{corda } 2C}{\text{corda } 180^\circ.\text{corda }(180^\circ - 2C)}$$

Esta formula exprime a relação entre a hipotenuza, um lado, e o angulo agudo adjacente a este.

Finalmente a 6ª formula será obtida aplicando a 2ª (que exprime a relação entre um lado, a hipotenuza e o angulo oposto) ao lado oposto ao angulo A'' que existe em ambos os triangulos. Tem-se então:

$$\text{corda } 2C'' = \frac{\text{corda } 2C.\text{corda } 2A''}{\text{corda } 180^\circ};$$

e introduzindo o triangulo complementar:

$$\text{corda }(180^\circ - 2N) = \frac{\text{corda }(180^\circ - 2A''G)\text{corda } 2A''}{\text{corda } 180^\circ}$$

ou na notação de Delambre:

<u>6ª formula</u>:

$$\text{corda}(180^\circ - 2A') = \frac{\text{corda }(180^\circ - 2C')\text{corda } 2A''}{\text{corda } 180^\circ}$$

Formula que exprime a relação entre os dois angulos agudos e um, dos lados do angulo reto.

Devemos, pois, admitir que Hiparco conhecia todas essas formulas e que portanto a sua trigonometria era completa sob esse aspeto.

Eis aqui o quadro dessas seis formulas, dispondo no fim as que contem os dois angulos e não parecem ter sido utilizadas

1ª os tres lados:

$$\text{corda}\,(180^\circ - 2C) = \frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2C')\,\text{corda}\,(180^\circ - 2C'')}{\text{corda}\,180^\circ}$$

2ª um lado, a hipotenuza e o angulo oposto ao lado:

$$\text{corda}\,2C' = \frac{\text{corda}\,2C.\text{corda}\,2A'}{\text{corda}\,180^\circ}$$

3ª dois lados e um dos angulos agudos:

$$\frac{\text{corda}\,2C''}{\text{corda}\,(180^\circ - 2C'')} = \frac{\text{corda}\,2C'\,\text{corda}\,2A''}{\text{corda}\,180^\circ\,\text{corda}\,(180^\circ - 2A'')}$$

4ª lado, hipotenuza e angulo adjacente ao lado:

$$\frac{\text{corda}\,2C''}{\text{corda}\,(180^\circ - 2C'')} = \frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2A')\,\text{corda}\,2C}{\text{corda}\,180^\circ\,\text{corda}\,(180^\circ - 2C)}$$

5ª hipotenuza e os dois angulos:

$$\frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2A')}{\text{corda}\,2A'} = \frac{\text{corda}\,(180^\circ - C)\,\text{corda}\,2A''}{\text{corda}\,180^\circ\,\text{corda}\,(180^\circ - 2A'')}$$

6ª lado e os dois angulos:

$$\text{corda}\,(180^\circ - 2A') = \frac{\text{corda}\,(180^\circ - 2C')\,\text{corda}\,2A''}{\text{corda}\,180^\circ}$$

Quando os problemas dependião da rezolução dos triangulos obliquangos, Hiparco e os seus sucessores gregos os fazião recahir em combinações de triangulos retangulos. De sorte que as formulas precedentes erão sempre suficientes, embora os calculos fossem por vezes bem longos. Dessas combinações, a mais simples consistia em decompor o triangulo obliquangulo em dois triangulos retangulos, imaginando um circulo ma-

ximo baixado perpendicularmente da extremidade de um lado conhecido para um outro lado. Mas Delambre diz que só achou exemplos dessa marcha nos tres cazos seguintes:

1.º Quando são dados dois angulos sobre um lado conhecido;

2.º Quando são dados dois angulos e um lado oposto;

3.º Quando são dados dois lados e um angulo oposto;

Estes dois ultimos constituem os cazos duvidozos.

Dos outros tres cazos, a saber:

1.º Quando são dados dois lados e o angulo comprehendido;

2.º Quando são dados os tres lados — hipoteze que se encontra muitas vezes;

3.º Quando são dados os tres angulos — hipoteze que não se encontra nunca em Astronomia;

Delambre afirma não ter encontrado vestigio em Ptolomeu.

Quanto á rezolução dos triangulos retilineos, a sua unica dificuldade consistia na construção da taboa das cordas. Mas Hiparco fez tambem recahir o cazo geral no dos triangulos retangulos. Para estes ele servia-se das seguintes formulas:

1.º Dados dois lados, ou um lado e a hipotenuza ele deduzia o lado desconhecido pelo teorema teocratico:

$$C^2 = C'^2 + C''^2$$

e os angulos pelos teoremas:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\text{corda } 2A'}{120^p}$$

$$A' + A'' = 90°$$

2.º Dado um lado e um angulo agudo, ou a hipotenuza e um an

gulo agudo, o outro angulo rezultava do teorema de Thales:

$$A' + A'' = 90^{\circ}$$

Para o lado, Hiparco tinha:

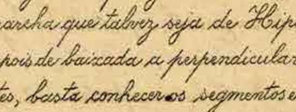
$$\frac{C'}{C''} = \frac{corda\ 2A'}{corda\ 2A''}$$

E para a hipotenuza:

$$\frac{C'}{C} = \frac{corda\ 2A'}{120^{p}}$$

Para rezolver os triangulos obliquangulos, Hiparco os decompunha em triangulos retangulos por uma perpendicular baixada de um dos vertices sobre o lado oposto. Mediante este artificio espontaneo, as formulas precedentes tornavão-se suficientes. Convem, porem, observar que o seu emprego é menos direto quando são dados os tres lados. Nesta hipoteze a dedução, para ter os angulos, é menos espontanea; mas já se achava preparada pela extensão do teorema teocratico aos triangulos obliquangulos. Ptolomeu dá, aliás, no livro dos Eclipses, uma marcha que talvez seja de Hiparco. Para concebê-la, note-se que, depois de baixada a perpendicular, para rezolver os triangulos componentes, basta conhecer os segmentos em que ela divide o lado oposto. Ora, este lado sendo dado, a soma de tais segmentos é conhecida; para ter cada um deles, só falta, pois, ter a sua diferença

Mantendo as notações indicadas chamemos p a perpendicular baixada do vertice A sobre o lado C. Teremos:



$$(1^{\circ} seg.)^2 = \overline{C}''^2 - p^2$$

$$(2^{\circ} seg.)^2 = \overline{C}'^2 - p^2$$

donde:

$$(1^{\circ}\text{seg.})^2-(2^{\circ}\text{seg.})^2=\bar{C}''^2-\bar{C}'^2$$

ou

$$[(1^{\circ}\text{seg.})+(2^{\circ}\text{seg.})][(1^{\circ}\text{seg.})-(2^{\circ}\text{seg.})]=(C''+C')(C''-C')$$

ou

$$C\times[(1^{\circ}\text{seg.})-(2^{\circ}\text{seg.})]=(C''+C')(C''-C')$$

donde finalmente:

$$1^{\circ}\text{seg.}-2^{\circ}\text{seg.}=\frac{(C''+C')(C''-C')}{C}$$

Os teoremas que conduzem a esta formula, erão conhecidos, sob forma geometrica, antes de Hiparco.

Obtida a diferença dos segmentos, o maior é igual á semi-soma mais a semi-diferença; e o menor é a semi-soma menos a semi-diferença. Calculados, pois, os segmentos, determina-se a altura pelo teorema teocratico; e por meio da altura, com os lados e os segmentos, obtem-se os angulos dos triangulos componentes, e, portanto, os angulos do triangulo obliquangulo.

5. Estado definitivo da trigonometria grega. O *analemma* de Ptolomeu.

Instituida sob a inspiração da Astronomia, a rezolução algebrica dos triangulos só podia dezenvolver-se si a mesma influencia exigisse o seu surto. Ora, longe disso, as necessidades sociais do momento tendião a determinar uma alta na elaboração sientifica. Porque a dissolução do politeismo tornava urgente e indispensavel uma nova faze provizoria na construção da religião, afim de impedir o aniquilamento do nucleo ocidental. Essa faze só podia ser organizada sob a prezidencia do monoteis-

mo, unico modo de teologismo compativel com o conjunto da situação moral, mental e pratica da civilização greco-romana neste momento. E o dezenvolvimento da Astronomia dependendo desde então do acendente social do dogma do duplo movimento da Terra, era incompativel com a persistencia de qualquer forma de teologismo que tivesse eficacia organica

A vista desta situação historica, os grandes pensadores voltarão a sua atenção para o problema social e absorvêrão a sua atividade ou na vida politica ou na regeneração religioza, conforme os seus antecedentes pessoais os predispunhão para uma ou outra carreira. A cultura sientifica ficou, pois, entregue a espiritos secundarios incapazes de qualquer iniciativa teorica. Desde então os sientistas gregos limitarão-se essencialmente a conservar, comentar, e vulgarizar os rezultados adquiridos pelos seus egregios predecessores. Tal foi a unica utilidade do Muzeu de Alexandria, onde os retoricos e metafizicos não tardarão a prevalecer.

Baldo do estimulo social, o impulso astronomico de Hiparco amorteceu-se desde que se reconheceu que os metodos graficos permitião atingir o grau de precizão dezejado. Assim esses metodos readquirirão, por preferencia, o acendente que antes tinhão por necessidade. Mas a reforma operada na Astronomia por Hiparco determinou uma melhor utilização das construções geometricas, adaptadas, a partir deste momento, á marcha por ele assinalada, para a solução dos problemas que ele instituira.

Esse foi o destino do <u>analemma</u> pelo qual Ptolomeu preparou diretamente os aperfeiçoamentos que os arabes havião de realizar na trigonometria Hiparchiana e que os modernos ocidentais completarião. Antes de apreciar similhantes aperfeiçoamentos devemos pois caraterizar essa institui-

ção, para que se possa ter uma idéia exata do conjunto dos meios pelos quais os gregos rezolvião as questões trigonometricas, isto é, para que se tenha uma idéia exata do estado em que os Arabes recebêrão a Trigonometria. No que se segue continuaremos a utilizar-nos da Historia da Astronomia Antiga de Delambre cuja expozição seguiremos quazi sempre textualmente.

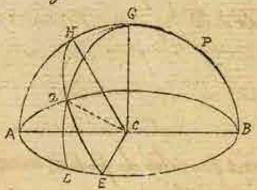
"O analema é a descrição da esfera sobre um plano. Tração-se neste as secções dos diferentes circulos, tais como os paralelos diurnos e tudo o que póde facilitar a siencia das sombras e dos quadrantes. Essa discrição realiza-se por perpendiculares abaixadas sobre o plano; o que fez dar-lhe pelos modernos o nome de projeção ortografica. A palavra analema significa pouco mais ou menos a mesma couza que lemma; o analema é para as construções graficas o que o lemma é para as demonstrações geometricas; é uma figura subsidiaria na qual se toma o que pode abreviar e facilitar a construção da figura principal.

"Os circulos principais do analema são o horizonte, o primeiro vertical e o meridiano; os tres eixos são: a meridiana, eixo do primeiro vertical; a vertical, que se chama tambem o gnomon, eixo do horizonte; e o diametro horizontal do primeiro vertical, que se chama tambem equinoxial, e que é o eixo do meridiano. Eis ahi a primeira menção que acho desses tres eixos ortogonais nos escritos dos Gregos.

"Qualquer que seja a pozição de um astro acima do horizonte, pelo lugar que ele ocupa, pode-se sempre conceber tres grandes circulos que se interceptão no centro, e que têm cada um dos tres eixos para diametro.

Assim, pelo astro Z pode-se tirar o arco BZA, que passa pelos pontos norte e sul do horizonte; HZE, que passa pelos pontos leste e oes

te: emfim o vertical GZL, que passa pelo zenith e o nadir. O arco AZB que passa pelos pontos norte e sul do horizonte, chama-se bem impropriamente circulo horario[1]; o vertical GZL chamava-se decensivo ou de acensão e decensão; o circulo HZE que passa pelos pontos leste e oeste chamava-se hectemoria, ou das seis partes, porque ele pode tomar seis pozições principais em torno do horizonte. Ptolomeu não diz quais são essas seis pozições; são provavelmente as pozições relativas ás seis horas temporarias, quer da manhan, quer da tarde.



A distancia esferica do astro a um dos pontos norte ou sul (AZ) do horizonte, chamava-se o arco horario; em lugar da distancia zenital (ZG) empregava-se mais ordinariamente a altura (ZL) que se chamava o decensivo; o arco do meridiano (AH) que mede a inclinação do circulo hectemoria sobre o horizonte chamava-se tambem hectemoria pelo menos entre os antigos matematicos que não fazião nenhum uzo do circulo AZB; o complemento (GH) do arco precedente (AH) denominava-se no plano do vertical; em lugar do angulo (EL) do vertical do astro com o primeiro vertical, empregava-se o seu complemento (AL) que se chamava antisciano, porque ele se achava no prolongamento da direção da sombra.

A origem dos arcos do hectemoria é no ponto levante (E) ou

(1) Sem duvida a denominação vem da esfera reta.

R. T. M.

no ponto oposto; a do horario é no sul ou no norte do horizonte; a do decensivo no zenith. Esses tres arcos medem os angulos que o raio vector do astro faz com os tres eixos ortogonais acima mencionados.

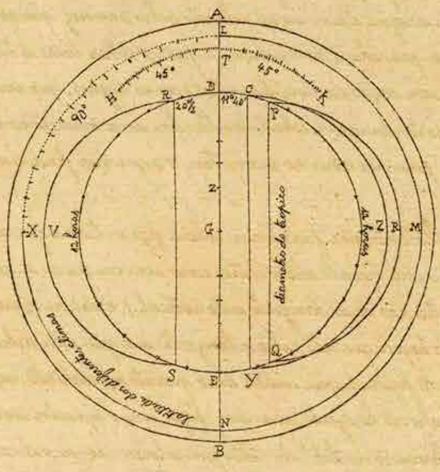
Isto posto, eis o analemma descrito por Ptolomeu e que parece da sua invenção.

Este analemma é composto de duas peças. A principal é uma prancha de pedra, madeira ou metal, na qual estão traçados varios circulos, dos quais uns são divididos e outros não. A segunda é um esquadro muito delgado, cujos catetos são pelo menos do tamanho do raio do maior dos circulos do analemma. Este esquadro dispensará de traçar realmente as perpendiculares de que se carecer; elas serão tidas em grandeza e pozição passeiando o esquadro sobre as linhas retas da figura. Nas operações servir-se-á tambem de um compasso para conhecer o comprimento das linhas e das cordas, e portanto o valor dos angulos.

Seja AB o diametro do maior circulo, G o centro; discrito esse circulo, subtraia-se do raio o terço AD do seu comprimento, e com o resto GD, e do centro G, descrevei o circulo meridiano sobre o diametro DGE, que tomareis para o diametro do equador; diminuí ainda GD do seu terço GZ e do centro Z, e com o intervalo ZT = GD descrevei o arco de 90° HTK. de um circulo igual ao meridiano, de sorte que esse quarto de circulo seja dividido em dois arcos de 45°. Dividi esse arco nos seus 90° com cuidado.

Depois, do centro G e com o raio GL, L sendo o meio entre A e T, descrevei o circulo LMNX, do qual dividireis um quarto somente nos seus 90°. Aki marcareis as latitudes dos diferentes climas, colocando ao lado do algarismo que indicar essa latitude,

o numero de horas do dia mais comprido. Assim, em frente de 36° de latitude de Rhodes, colocareis $14^h \frac{1}{2}$, duração do dia no solsticio do verão. To-



mai $DP = EQ = 23°51'$ e traçai PQ, diametro do tropico; tomai do outro lado $DR = ES = 20°\frac{1}{2}$, e tirai RS, diametro do paralelo que passa por 2^h e 4^h de longitude; tomai $DC = EY = 11°40'$ e tirai CY; será o diametro do paralelo que passa por 1^h e 5^h. Sobre esses tres semi-diametros descrevei os semi-circulos PRQ, RVS, e CZY, que não dividireis. Mas quanto aos semi circulos do meridiano, traçados sobre o diametro do equador vós os dividireis cada um em 12^h iguais de 15° cada uma. De cada um desses arcos abaixareis sobre o diametro perpendiculares ocultas que o dividirão em doze partes, que marcareis; porque todas essas couzas são comuns a todos os

climas. Vê-se que as partes do diametro são senos e senos versos.

Si a prancha é de cobre ou de pedra, não será necessario apagar os traços gravados; porque as couzas que varião com os climas, isto é, os dois diametros e as divizões das horas se acharão sobre o verniz que cobrirá tudo. Si o tambor ou prancha é de madeira, é precizo cobrir todos os traços com uma côr preta, com eceção dos dois diametros com os signos, que serão pintados de vermelho; extender-se-á sobre todo o tambor uma cera, como se pratica sobre as esferas, para não cobrir ao mesmo tempo o que deve ficar e o que deve variar.

Feito isto, será facil tomar sobre a figura tudo o que ela nos pode dar, quando tivermos traçado os diametros como convem para a altura do polo (esses diametros são os do horizonte e do vertical), e depois a secção que indica a parte do tropico que está sobre o horizonte e a que está debaixo da terra.

A figura supra indica tudo quanto é constante; só resta traçar nela o diametro do horizonte, que deve fazer com o equador um angulo igual ao complemento da latitude. Depois colocar-se-á o diametro do vertical perpendicular ao diametro do horizonte. Dividiremos esses diametros como dividimos o do meridiano, em senos de arcos crecendo uniformemente. Feitas essas divizões dos diametros, apagaremos as divizões dos circulos que servirão.

Ptolomeu passa ao uzo do instrumento, mostrando como, conhecida a pozição do astro, no seu paralelo, se determinão:

1.º o arco do hectemoria, que mede o angulo do raio vetor do astro com a linha leste oeste;

2.º o arco horario, que mede o angulo do mesmo raio com a meridiana;

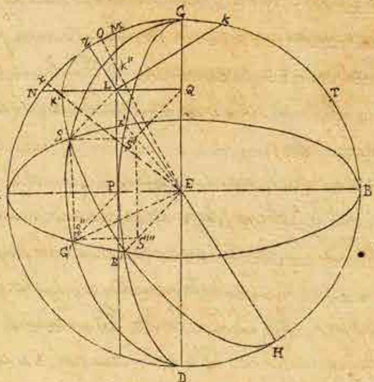
3.º a distancia zenital que mede o angulo do mesmo raio com a vertical;

4.º o arco do hectemoria;

5.º o arco do vertical que mede o angulo do circulo horario com o meridiano;

6.º o arco do horizonte ou angulo no zenith que mede o angulo do vertical do astro com o primeiro vertical.

Ptolomeu considera primeiro o cazo mais simples, supondo que o astro, o Sol por exemplo, está no equador.



Seja A G B D o meridiano, A B o diametro do horizonte (linha norte-sul), G D a vertical (linha zenith-nadir), Z E H o diametro do equador, T o polo norte, Z T o quarto de circulo acima da Terra. O equador está dividido em secções horarias sobre o analemma. Imaginemos essas secções sobre Z H (diametro do equador). Seja L K a perpendicular a uma dessas di-

vizões; o equador é aqui o circulo hectemoria, e, si o supuzermos rebatido sobre o meridiano, mediante um giro em torno do seu diametro, o ponto S irá cahir em K (SL=LK), e o ponto E em T. ES=TK será o arco do hectemoria que corresponde á divizão horaria EL. Tomando com um compasso o arco TK, e transportando-o sobre o quarto de circulo do analemma, teriamos o seu valor em graus. (EL sobre o diametro do equador será para nós o coseno do angulo horario ZS e o seno de TK).

Para achar o <u>arco horario</u> AS, imaginemos que o circulo horario ASB rebate-se sobre o meridiano, mediante o giro em torno da meridiana AB. O ponto S descreve um circulo cujo plano é perpendicular ao do meridiano e passa por L. Assim para ter a pozição final de S, basta tirar a perpendicular LP sobre a linha norte-sul. AM=AS. Assim AM ou AS é determinado por PE, que, para nós, é o seu coseno.

Para ter o decensivo ou a distancia zenital SG, rebatamos o vertical do astro GSG' sobre o plano do meridiano, mediante o giro em torno da vertical GD. O ponto S descreve um circulo perpendicular á vertical e passando por L. Portanto para ter a pozição final de S, basta tirar a perpendicular LQ. Então GS coincidirá com GN. Assim GN é determinado por QE que, para nós, é o coseno de GS.

O arco AZ dá imediatamente a altura do hectemoria que é aqui o equador.

Para ter o arco do vertical Gx', que mede o angulo do circulo horario com o meridiano, basta rebater o primeiro vertical sobre o meridiano, mediante o giro em torno da vertical. O ponto x' descreve um circulo perpendicular á vertical que ficará determinado por meio do angulo x'EG.

Tudo depende pois de determinar a pozição da reta x'E depois do rebatimento. Para isso, note-se que QS' virá a coincidir com QN e o ponto S' achar-se-á em QN, a uma distancia de Q igual LS=LK= =QK'. Portanto x'E coincidirá com xE. Assim Gx será o arco do vertical, e fica determinado por EQ que, para nós, é o coseno de GS e por LK que, para nós, é o seno de ZK ou ZS.

Resta achar o arco do horizonte G'E', que mede o angulo do vertical do astro com o primeiro vertical. É o que se consegue rebatendo o horizonte AG'E'B sobre o meridiano. Nesse rebatimento EE' coincidirá com EG; e, para saber a pozição de EG', note-se que S'' cahirá sobre PM, a uma distancia de P igual a S''P=SL=LK. Portanto E'G' coincidirá com GO que se determina tomando em PM, a partir de P, PK''=LK, e tirando o raio EK''. Assim GE é determinado por PE, que, para nós, é o seno de MG e LK que, para nós, é o seno de ZK ou SZ.

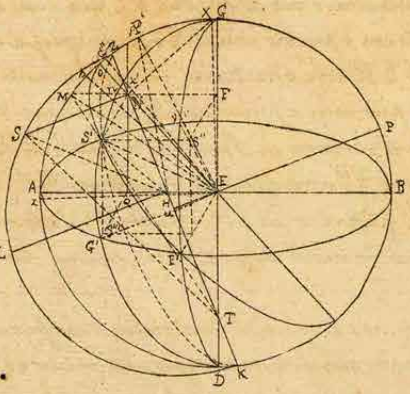
Tudo isso é simplesmente uma construção grafica na qual se achão os arcos pelos seus senos com a regua e o compasso; e o que ha de extraordinario, é o emprego dos senos em lugar das cordas; e o que dá á operação um ar estranho, são essas denominações insólitas dos tres diferentes arcos.

Para todas essas quantidades, nós encontramos pela moderna Trigonometria esferica os mesmos valores que pelas construções de Ptolomeu. É incrivel que fazendo esse uzo dos senos, ele não tenha cuidado em substitui-las ás cordas da Trigonometria hiparchiana.

Tudo isso era facil porque a declinação era nula.

Ptolomeu considera o cazo geral, supondo que o Sol se acha em

um paralelo austral, cujo diametro é ZTK. Suponha-se esse paralelo rebatido em ZSLK; ZL é a porção acima da Terra, LK, a parte que está abaixo; L se acha colocando o esquadro sobre ZK, de sorte que o angulo reto esteja no horizonte em H. Divida-se esse semi-circulo em 12^h, e pelos pontos de divizão, passeiando o esquadro, dividi ZK em senos ho-



rarios. Suponde o Sol em S, a perpendicular SN marcará a hora sobre ZK.

Vê-se que a hora sendo dada assim como a declinação, ter-se-á ZS, SN, e ZN, o seno NG da altura S'G' do Sol (NG = S'S'''), e por consequencia todas as partes da figura.

Para ter a hectemoria (E'S') rebata-se o circulo hectemoria sobre o meridiano. O ponto S descreve um circulo cujo raio NS' = NS será perpendicular a EO e cahirá sobre o meridiano. Portanto, para determinar a pozição extrema de S basta, com um compasso, fazer centro em N e, com um intervalo NS,

marcar o ponto X em que o circulo que ele descrevesse corteria o meridiano. OX será o rebatimento de OS' complemento do hectemoria. Para ter este, ponha-se o vertice do esquadro em E e um lado em X, o outro lado marcará o ponto x, de sorte que Ox será o hectemoria.

Toda essa operação é muito simples; e vê-se que ela não emprega sinão senos comquanto esta palavra não esteja no original (NS = seno de ZS; Eu = seno da declinação).

Para ter o arco horario AS', rebata-se o circulo horario AS'B sobre o meridiano, mediante um giro em torno da meridiana AB. A interseção do circulo horario AS'B com o paralelo do Sol é (S'H) a hipotenuza de um triangulo retangulo que tem para lados NH e NS' = NS. No rebatimento, a extremidade S' dessa hipotenuza cahirá sobre um ponto do meridiano que se obterá fazendo centro em H e com um intervalo S'H. Obtido esse ponto P, tem-se o rebatimento do angulo S'EA ou o arco AS' horario que será AP.

Para ter o decensivo ou a distancia zenital, começamos por notar que a interseção do vertical do Sol GG' com o paralelo do Sol é (S'T) a hipotenuza de um triangulo que tem para lados TN e S'N = NS; essa interseção é pois igual a TS. Ora, quando o circulo vertical do Sol se rebate sobre o meridiano, mediante um giro em torno da vertical, T não muda e o ponto S' deve cahir em um ponto do meridiano que diste TS = TM do ponto T. Desde então ES' tomará a direção EM e a distancia zenital será MG.

Até aqui Ptolomeu rezolveu graficamente ENS', EHS', ETS', que lhe dirão a distancia S'E do Sol ao ponto levante do equador, ou S'O ao meridiano; a distancia AS' ao ponto sul do horizonte; e GS, distancia ao zenith. A sua construção lhe dá diretamente AO ou o angulo que faz com

o horizonte o circulo que ele chama horario, e que é tirado do ponto leste do horizonte ao meridiano, passando pelo centro do Sol. Temos pois quatro das seis quantidades que se trata de determinar. Ptolomeu continua.

Para determinar o arco do vertical Gv, rebata-se o primeiro vertical sobre o meridiano. Nesse rebatimento S''F cai sobre FN e o ponto S''se achará a uma distancia de F igual a S''F = S'N = SN. Portanto, para ter a pozição de vE, basta tomar sobre NF uma grandeza igual a Fm = NS, e G será o rebatimento de Gv, isto é, o arco do vertical que dá a distancia zenital do circulo horario ASvB.

Finalmente para ter o arco do horizonte, isto é, o angulo G'E', do vertical do Sol com o primeiro vertical, rebate-se o horizonte sobre o meridiano. Nesse rebatimento, GS''' tomará a direção GN e o ponto S''' se colocará em x' a uma distancia Gx' = NS, o raio EG' cahirá pois sobre EG'' e o arco GG'' medirá o angulo no zenith ou o angulo no horizonte.

....

"O tratado do Analemma será sempre curiozo, quer para a historia da siencia, de que nos conservou uma parte, da qual não resta nenhum outro monumento, e que se acreditava inteiramente perdida; quer por essa outra consideração, que <u>ele contem o germen da Trigonometria moderna e dos senos substituidos ás cordas</u>.

"Rezulta das nossas pesquizas (diz mais adiante Delambre) que os Gregos tinhão imaginado e reduzido á pratica as tres especies de projeções uzadas em Astronomia, e que tiverão a idéia de referir um ponto qualquer da esfera celeste a tres eixos ortogonais. Tal é o fim que se propõe Ptolomeu começando o seu Analemma; ele emprega ahi verdadeiramente o senos em lugar das cordas; ensina a dividir um diametro em senos e senos versos; por

meio meio desses senos, ensina a achar a situação do astro sobre o seu paralelo; as construções lhe dão a solução grafica do problema que serve para determinar os angulos que o raio tirado do centro da esfera ao ponto ocupado pelo astro faz com tres circulos ou tres planos ortogonais.

As tres especies de projeções conhecidas dos gregos são pois:

1.º A projeção ortografica, na qual qualquer arco é reprezentado pelo seu seno ou seu seno verso, conforme tem para origem o meio ou o nódo desse circulo com o plano de projeção. Essas duas propriedades gerais são supostas por toda parte no Tratado do Analemma, sem serem formalmente enunciadas em parte alguma. <u>É pois certo que os Gregos tinhão duas especies de Trigonometria, uma simplesmente grafica e que se servia dos senos; a outra para o calculo, e essa não se servia sinão das cordas dos angulos ou arcos duplos.</u>

2.º A projeção gnomonica, na qual cada distancia ao polo, ou todos os arcos do circulo maximo que tem a sua origem no polo, são reprezentados pelas suas tangentes, que fazem entre si angulos iguais áqueles segundo os quais os arcos se interceptão no polo. Essas duas propriedades são igualmente supostas no Tratado do Analemma; a dos angulos é muito vizivel ahi; a outra é menos aparente, porque os Gregos não tendo nenhuma idéia das tangentes, erão obrigados a substitui-las pelo seu equivalente, isto é, pela relação dos senos aos cosenos.

3.º A projeção stereografica, na qual todos os circulos da esfera, maximos e pequenos, são reprezentados por circulos que se interceptão sob os mesmos angulos que na superficie da esfera. A primeira dessas propriedades é demonstrada no planisferio para todos os cazos particulares, e de uma maneira assaz uniforme, que nao se utiliza do teorema de Apolonio. O teorema geral não é enunciado em parte alguma; mas de-

ve-se crer que ele foi pelo menos entrevisto; e, si eles não ouzárão tirar a concluzão geral dos cazos particulares que considerárão, deve-se atribuir isso primeiro ao rigor geometrico que se impunhão como lei impeoza,[1] e depois a que nunca punhão um teorema ou uma solução em formulas ou equações, o que os impediu de tirar corolarios por vezes muito importantes e que se oferecião espontaneamente. Quanto á propriedade dos angulos da projeção iguais aos da esfera, ela rezulta bem das suas construções, mas ela não é enunciada em parte alguma, e pode-se crêr que nem siquer a entrevirão.»

(Delambre. Hist. Astr. Antiga II)

Apreciando o Analemma, Delambre compara as construções de Ptolomeu com as formulas da Trigonometria moderna e mostra como essas formulas equivalem ás construções de que se trata. Assim, a propozito de uma destas, Delambre diz:

«É o teorema fundamental da Trigonometria moderna. Ele estava pois na construção de Ptolomeu, que teria podido descobrí-lo, pois que a sua construção não emprega sinão os senos; mas teria sido precizo pôr o problema em equações e dezenvolver, o que os antigos nunca souberão praticar, e o que opoz um obstaculo quazi insuperavel aos seus progressos.»

Delambre não podia apanhar a verdadeira natureza de tal

---

[1] Esses habitos estreitos erão devidos ao acendente dos sofistas no meio grego. R. T. M.

obstaculo, pois que ele dependia, não da situação matematico-astronomica izoladamente apreciada, mas do conjunto da situação social. As reflexões que aprezentamos acima nos dispensão de insistir sobre este ponto.

6. Apreciação geral dos aperfeiçoamentos que requeria a Trigonometria hiparchiana.

Tal como foi instituida por Hiparco, a Trigonometria rezolveu essencialmente o problema que consistia em substituir os processos numericos ás construções geometricas na rezolução dos triangulos, quer retilineos, quer esfericos. Mas, para que similhante fundação satisfizesse cabalmente aos dezignios da Humanidade, era precizo que ela passasse por uma serie de aperfeiçoamentos, que só começárão a ser realizados nos fins do nono seculo da era catolica. Inaugurados então por Albategnius, principe arabe que viveu nos anos proximos a 880, e continuados pelos muzulmanos, eles forão proseguidos pelos ocidentais a partir da segunda metade do seculo XV até o nosso Mestre. Vê-se por ahi que tais aperfeiçoamentos só principiárão a atrahir a atenção dos teoristas depois de satisfeitas fundamentalmente as necessidades religiozas da vanguarda da Humanidade, tanto no Ocidente como no Oriente. Os ocidentais só participárão mesmo de tal progresso depois de esgotada a aptidão religioza do catolicismo, conforme o demonstrava seculo e meio de dissolução espontanea do regimen medievo. Já então, sob o impulso do infante D. Henrique, a navegação tinha tomado o seu surto decizivo, mediante a fundação

da escola de Sagres (em 1421).

Antes de especificar esses aperfeiçoamentos cumpre apreciar a sua natureza. Eles são de duas ordens: uns têm um alcance sobretudo pratico, outros têm por fito satisfazer principalmente as exigencias teoricas, quer matematicas, quer filozoficas. Os primeiros vizárão o atingimento de maior precizão e de mais rapidez nos calculos. Os segundos tiverão por fim dar ao sistema trigonometrico a sua plena racionalidade. Dessas duas categorias de aperfeiçoamentos, forão os exigidos pelas necessidades praticas da maior precizão e da maior rapidez nos calculos os primeiros conseguidos. Cumpre mesmo notar que, no principio, a preocupação da brevidade prevaleceu sobre a da precizão. Indicaremos agora especialmente esses melhoramentos sucessivamente introduzidos na instituição hiparchiana da Trigonometria.

Brevidade nos calculos. — A rapidez dos calculos depende: 1.º da simplicidade das operações indispensaveis a cada momento; 2.º da multiplicidade das formulas disponiveis, de modo a dispensar das deduções que serião necessarias para obter, em cada cazo, a formula adequada á passagem do abstrato ao concreto; 3.º da generalidade das formulas que permite condensar o maior numero de cazos em uma regra unica.

Sob qualquer desses aspetos, a instituição de Hiparco precizava de ser aperfeiçoada. Em primeiro lugar, a sua solução do problema trigonometrico exigia não só multiplicações e divizões, como extrações de raiz quadrada. Em segundo lugar, o calculo dos angulos era indireto, visto como a corda correspondia a um arco que mede o dobro do angulo. Em terceiro lugar o calculo dos elementos dos triangulos só era direto em relação aos triangulos retangulos. A introdu-

ção de uma unica linha trigonometrica e o fato de não tomar o raio para unidade tornavão, por outro lado, dificil de reparar esses inconvenientes, conforme a experiencia o demonstrou. Finalmente o sistema arimetico dos gregos, quer decimal, quer sexagezimal, vinha juntar novas dificuldades.

Para acabar de caraterizar, sob esse aspeto, a trigonometria hiparchiana, reproduziremos a seguinte observação de Delambre:

"Ptolomeu emprega aqui o teorema geral tal qual (tout brut) o que ele faz nas outras ocaziões, rezervando-se introduzir de cada vez as modificações fornecidas pelos dados, em lugar de dispôr de antemão o teorema para os triangulos retangulos, o que era tanto mais natural, quanto de fato não se calculavão outros. O primeiro inventor póde não ter tomado esse cuidado; porem Ptolomeu vindo mais de 260 anos depois de Hiparco, deveria ter feito de uma vez por todas essa redução tão facil e tão util, que lhe teria poupado bastantes delongas.

. . . .

"Nós temos uma Trigonometria mais expedita, a devemos aos nossos logaritmos, ao nosso raio que tomamos para unidade, ao calculo decimal; emfim á multidão das nossas formulas. Os gregos não tinhão sinão teoremas gerais, e deles tiravão penozamente todas as suas soluções particulares. Nós temos tambem teoremas gerais; mas deles deduzimos teoremas particulares para todos os cazos que admitem simplificações, e o calculo numerico se acha reduzido aos seus menores termos. Os antigos poderião ter feito uma parte do que fizemos, e pode-se ficar sorprezo de que nunca se hajão lembrado disso.»

(Hist. da Astr. Ant. II, pg. 78-79)

Os antigos não realizarão tais aperfeiçoamentos porque a situação

da Humanidade não os solicitava então, conforme já ponderamos acima.

Os Arabes começárão a introduzir os aperfeiçoamentos que, sob esse aspeto, exigia a Trigonometria grega. O seu primeiro passo nesse sentido consistiu em substituir os senos ás cordas, o que foi realizado por Albategnius. Depois creárão as tangentes que permitirão suprimir as divizões, e as secantes que transformárão as divizões em multiplicações. Por meio dessas linhas trigonometricas Ebn-Jounis determinava arcos subsidiarios que simplificavão as formulas e dispensavão das extrações da raiz quadrada.

Os ocidentais concluirão esse conjunto de aperfeiçoamentos introduzindo, na avaliação das linhas trigonometricas o sistema numeral dos indús, que lhes tinha sido transmitido pelos arabes, e que eles tinhão completado mediante a instituição das frações bazicas (frações decimais). Desta maneira facilitárão consideravelmente os calculos; mas o melhoramento decizivo consistiu na invenção dos logaritmos, que reduziu todas as operações a adições e subtrações. Convem notar que essa invenção e a das frações bazicas têm um carater geral aplicando-se a todos os calculos; ao passo que os aperfeiçoamentos até então introduzidos vizavão excluzivamente a simplificações dos calculos trigonometricos.

Demais forão os ocidentais que instituirão as formulas apropriadas a todos os cazos e conseguirão a condensação das formulas mediante a interpretação carteziana dos sinais aditivo e subtrativo. Isto veiu patentear toda a superioridade dos senos e tangentes sobre as cordas que não comportão similhante interpretação. Ao mesmo tempo os logaritmos tornavão desnecessarias as secantes que tambem não se

prestão á aplicação da regra carteziana.

Precizão dos calculos. _ Sob esse aspeto, a trigonometria hiparchiana aprezentava as seguintes lacunas: 1ª_ as taboas das cordas erão calculadas de 30' em 30'; 2ª_ as menores subdivizões do raio, que servião de unidade para a avaliação das cordas, tornavão os erros ainda muito consideraveis. Alem disso a unica linha trigonometrica introduzida sendo a corda que varia desde 0 até o diametro, não permitia suficiente precizão na avaliação dos arcos muito proximos de 0 ou de 180º. Esse inconveniente existe quanto aos senos; mas dezaparece quanto ás tangentes, que permitem facilmente distinguir os arcos quaisquer, o que melhor evidencia a sua importancia.

Os Arabes não repararão similhantes lacunas que só forão preenchidas pelos ocidentais, levando a divizão do arco e a avaliação das linhas trigonometricas á maxima precizão que a pratica póde jamais exigir.

Extrahiremos da Introdução historica das Taboas matematicas etc., de Carlos Hutton, a indicação da marcha de tais progressos. Depois de ter mencionado os trabalhos dos Arabes, diz ele:

"Os outros grandes melhoramentos que forão feitos neste ramo, são devidos aos Europeus. Tais melhoramentos forão gradualmente introduzidos desde que estes receberão essa siencia dos Arabes. E comquanto este ultimo povo se servisse desde muito da escala arimetica Indiana ou decimal, não consta que mudasse a divizão Grega ou sexagezimal do raio, pelo qual as cordas e os senos forão expressos.

"Diz-se que esta alteração foi pela primeira vez feita por Ge-

ge Purbach, assim chamado do lugar do seu nacimento que fica entre a Austria e a Baviera. Naceu ele em 1423, estudou matematicas e astronomia na universidade de Viena, onde foi depois professor dessas siencias, posto que por pouco tempo, o mundo das letras sofrendo em breve uma grande perda com a sua morte prematura, que sobreveiu em 1462, aos 39 anos de sua idade. Purbach alem de enriquecer a trigonometria e a astronomia com varias taboas novas, teoremas, e observações, supoz o raio dividido em 600 000 partes iguais, e calculou os senos dos arcos, de 10' em 10', nessas partes, segundo a notação decimal.

"Este projeto de Purbach foi completado pelo seu dicipulo, companheiro e sucessor João Muller ou Regiomontano, assim chamado do lugar do seu nacimento, a pequena aldeia de Mons Regius, ou Koningberg na Franconia, onde ele naceu em 1436. Regiomontanus não sómente extendeu os senos aos arcos de 1' em 1', o raio sendo 600000, conforme Purbach instituira, porem depois, abandonando tal projeto, como evidentemente imperfeito calculou-os igualmente para o raio 1000000, para cada minuto do quadrante. Ele tambem introduziu as tangentes na trigonometria (1) cujo __canon__ (taboa) chamou __fœcundus__, por cauza das suas muitas e grandes vantagens. Alem disso enriqueceu a trigonometria com muitos teoremas e preceitos. Em consequencia desses aperfeiçoamentos, eceto quanto ao uzo dos logaritmos, a trigonometria de Regiomontanus é pouco inferior á dos nossos dias. O seu tratado sobre a trigonometria plana e esferica, é em 5 livros; foi escrito em 1464 e impresso em folio em Nuremberg em 1533. No 5º livro ha varios problemas concernentes aos tri_

---

(1) Entende-se entre os Ocidentais.

R. T. M.

angulos retilineos, alguns dos quais são rezolvidas por meio da algebra: prova de que essa siencia não era totalmente desconhecida na Europa antes do tratado de Lucas de Burgo. Regiomontanus morreu em 1476, na idade de 40 anos..............

"Logo depois destes, outros matematicos contribuirão para o aperfeiçoamento da Trigonometria, estendendo e aumentando as taboas, conquanto poucas de suas obras tenhão sido impressas..........

"No ano de 1500, Nicolau Copernico, o famozo restaurador moderno do verdadeiro sistema solar, escreveu um breve tratado de trigonometria plana e esferica, com a descrição e construção do canon das cordas, ou as suas metades, mais ou menos a modo de Ptolomeu; ao qual juntou um canon dos senos, com as suas diferenças, de 10' em 10' do quadrante, para o raio 100000. Esse tratado foi inserido no primeiro livro de suas Revolutiones Orbium Calestum, impressas pela primeira vez em Nuremberg em 1543. É notavel que ele não chame essas linhas senos porem semisses subtensarum, isto é, dos arcos duplos. Copernico naceu em Thorn em 1473, e morreu em 1543.

Em 1553 foi publicado o Canon fœcundum ou taboa das tangentes de Erasmus Reinhold, professor de Matematicas da Academia de Würtenberg. Ele naceu em Salfieldt na baixa Saxonia, em 1511 e morreu em 1553.

A Francisco Maurolicus, abade de Messina, na Sicilia, deve-se a introdução da Tabola Benefica, ou canon das secantes[1], que apareceu pelo mesmo tempo ou pouco antes."

Para completar a serie de predecessores de Viète só falta mencionar

[1] Entende-se entre os Ocidentais. R.T.M.

"Jorge Joaquim Rheticus, professor de matematicas na universidade de Wurtemberg, e durante algum tempo decipulo de Copernico, morto em 1576, com 60 anos de idade. Ele concebeu e executou o grande projeto de calcular o canon triangular de 10" em 10" do quadrante, para o raio 1 seguido de 15 zeros ou 10^{15}. A serie de senos que Rhetico calculou para esse raio, de 10" em 10", e de 1" em 1", no primeiro e no ultimo grau do quadrante, foi publicado em folio, em Francfort, em 1613, por Pitiscus que ajuntou alguns dos primeiros senos calculados para o raio 10^{22}."

« Porem a grande obra, ou todo o canon trigonometrico, calculado por Rhetico, foi publicado em 1596 por Valentim Othon, matematico do Eleitor Palatino. »

Tais forão os antecedentes de Viète. Para a indicação. Para a indicação da obra trigonometrica do precursor de Descartes, extrairemos o estudo feito por Frederico Ritter, publicado em 1895. Mas como com ele começa a segunda categoria de aperfeiçoamentos de que carecia a trigonometria hiparchiana, convem mencionar a sua natureza geral. Consistirão eles em: 1.° instituir as bazes algebricas gerais das avaliações das linhas trigonometricas, já descobrindo as relações entre as linhas de um arco e as de suas partes ou dos seus multiplos, já inventando as relações entre as linhas trigonometricas e os arcos; 2.° condensar as formulas trigonometricas, já mediante a interpretação dos sinais pozitivos e negativos, já mediante a introdução dos simbolos imaginarios; 3.° descobrir as relações entre as formações trigonometricas e as formações abstratas, graças ao concurso das expressões imaginarias; 4.° instituir as formulas mais apropriadas para o calculo dos triangulos; 5.° finalmente o exame filozofico realizado por nosso Mestre que veio permitir a consagração definitiva do sistema espontaneamente inaugurado por Hiparco e mantido pelos seus sucessores.

Observações

Ao titulo deste trabalho devem ser acrecentadas as palavras Programa e materiais, que deixâmos de copiar.

Alem disso, tendo ele sido escrito segundo as régras das "Simplificações ortográficas" do Diretor do Apostolado Pozitivista, nós não introduzimos em sua ortografia as modificações últimamente indicadas nas "Normas ortográficas", tambem do Diretor daquele Apostolado, porque já havia sido iniciado o nosso trabalho quando fórão élas publicadas.

Tirâmos 150 exemplares, dispendendo 120.000 rs.: o preço de cada exemplar atingiu, portanto, à quantia de 800 rs.

Rio de Janeiro, 23 de Gutenberg de 113 (4 de Setembro de 1901)

Francisco Bueno Horta Barboza
Nicolau Bueno Horta Barboza

R. das Larangeiras, 125.

Errata

Correções mais importantes.

Pag. 21, penúltima linha — em vês de do eixo deste, leia-se do eixo désta.

Pag. 24, linha 22 — acrecente-se —, quando se considéra o tipo abstrato: em Astronomia convirá tomar a equação polar.

Pag. 27, linha 9 — em vês de pelo plano, leia-se pelos planos.

Pag. 30, linha 6 — em vês de eixo leia-se área.

" " linha 14 — em vês de alongamento leia-se alargamento.

Pag. 40, linha 21 — em vês de os problemas leia-se aos problemas.

Pag. 46, linha 14, em vês de universal leia-se planetária.

Pag. 48, linha 6 — em vês de $v^2 = 4a^2$, $v = 2a$, leia-se $y^2 = 4a^2$, $y = 2a$.

Pag. 49, linha 13 — em vês de transfórmão, leia-se transfórma.

Pag. 51, linhas 9 e 19, em vês de mapa-mundos, leia-se mapa-mundi.

" " linha 16 — em vês de será um circulo mássimo leia-se será o plano de um circulo mássimo.

Pag. 62, linhas 8 e 9 — em vês de mapa-mundo, leia-se mapa-mundi.

Terminando hoje a impressão da 10ª lição de Geometria Preliminar, cumprimos o dever de comunicar aos nóssos assinantes que dispendêmos com este trabalho 89.000 réis, tendo tirado 170 ezemplares, cada um dos quais saiu pois pelo preço de 523 réis.

Aproveitando a oportunidade, aqui repetimos a declaração, que já tivemos ocazião de fazer, de que nós somos os únicos responsáveis não só pelo serviço da impressão como tambem pela distribuição das lições que formos copiando.

Sobre a ortografia empregada nésta cópia, veja-se o opúsculo Normas ortográficas por Miguel Lemos, Diretor do Apostolado Pozitivista do Brazil.

Rio de Janeiro, 13 de Arquimédes de 114 / 7 de Abril de 1902.

Francisco Bueno Hórta Barbóza
Nicolau Bueno Hórta Barbóza

Laranjeiras, 125